ESENCIAL

MATEMÁTICAS

EDICIÓN AVANZADA

Fichas 1–34: Curso Completo

Jurcone Ramiro

2026

Copyright © 2026 Jurcone Ramiro
Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0).
De uso gratuito para fines personales y educativos. El uso comercial está prohibido.
Para más información, visite: rjurcone.net

Prefacio

Esta obra sintetiza los conceptos matemáticos fundamentales del programa de bachillerato.

La motivación para crear este libro fue la necesidad reconocida de contar con un único libro que contenga fórmulas matemáticas, métodos de resolución y soluciones modelo, para los cuales de otro modo sería necesario consultar todos los libros de texto de bachillerato y muchas colecciones de problemas.

El objetivo es ofrecer una presentación concisa y enfocada de los principales conceptos, sin pretender reemplazar el trabajo con libros de texto, colecciones de exámenes o colecciones especializadas. Al contrario, pretende ser tanto una introducción al estudio de las matemáticas de bachillerato como un manual de referencia para la consulta rápida de las principales fórmulas y métodos de resolución.

Los temas tratados están numerados según el sistema Ficha 1, Ficha 2, Ficha 3, y así sucesivamente.

Con el fin de prepararse para diversos exámenes, se recomienda que, tras completar el presente material, la preparación se realice utilizando una colección de temas de exámenes del tipo respectivo, con el objetivo de desarrollar las habilidades específicas para ese tipo de examen.

Como ejemplo en este sentido, pueden ser útiles los temas de exámenes de años anteriores.

El Autor

CÓMO USAR ESTE LIBRO

Preguntas Frecuentes

P: ¿Para quién es este libro?

R: Este libro está dirigido a múltiples destinatarios:

a) Estudiantes que buscan referencia rápida

- Fórmulas, métodos y estrategias de resolución — todo en un lugar
- Ideal para preparar exámenes y apoyar las tareas
- Sin necesidad de buscar en múltiples libros de texto

b) Padres instruidos que ayudan a sus hijos

- Recuerda rápidamente fórmulas y métodos que ya conocías
- Explicaciones claras que puedes transmitir a tu hijo
- Organizado sistemáticamente para una navegación fácil

c) Estudiantes dedicados que buscan comprensión profunda

- No solo el "cómo" sino el "POR QUÉ" — pensamiento matemático riguroso
- Construye bases sólidas que duran toda la vida
- Optimizado para el autoaprendizaje — aprende de forma independiente con confianza

d) Familias de la diáspora

- Disponible en ediciones en **rumano**, **inglés** y **español**
- Preserva el rigor matemático rumano viviendo en el extranjero
- Ayuda a los niños a sobresalir en cualquier sistema educativo

P: ¿Cuál es el nivel matemático de este libro?

R: Este libro cubre el programa de un **buen bachillerato europeo** de una ciudad importante, con especial énfasis en los estándares rumanos.

Contexto: La educación matemática rumana es reconocida internacionalmente por su excepcional rigor. Los estudiantes de los bachilleratos rumanos sobresalen consistentemente en competencias internacionales y en las mejores universidades del mundo. Este libro refleja esa tradición.

Nivel de dificultad: (4/5) — Intermedio a Avanzado

- Comienza accesible (conceptos básicos, trigonometría)
- Avanza hasta nivel universitario (álgebra lineal, cálculo, integrales)

- Culmina con matemáticas abstractas (estructuras algebraicas)

Comparación:

- Más riguroso que el bachillerato occidental típico
- Equivalente a los primeros 1–2 años de universidad técnica
- Similar a los mejores programas preparatorios

Nota: Los estándares varían según el país, pero este libro representa la **tradición rigurosa europea** donde la comprensión precede a la memorización.

P: ¿Puedo imprimir este libro?

R: ¡Sí! Este libro está formateado para papel estándar **A4**. Puedes imprimir fichas individuales o el libro completo en cualquier impresora doméstica o de oficina.

Muchos estudiantes encuentran útiles las fichas impresas como referencia rápida de fórmulas durante las tareas o la preparación de exámenes. Guárdalas en una carpeta para acceder fácilmente.

Este libro es tu "espada samurái" — una herramienta de calidad excepcional, entregada libremente. Lo que logres con ella depende únicamente de ti.

¡Buena suerte!

Índice

No.	Contenido	Pág.
1	Geometría Plana	9
2	Fórmulas Trigonométricas	13
3	El Círculo Trigonométrico	15
4	Gráficas de Funciones Trigonométricas	17
5	Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas	19
6	Números Complejos	21
7	Fórmulas Algebraicas	23
8	Ecuación y Función Cuadrática	25
9	Signo de la Función Cuadrática	27
10	Funciones Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas	29
11	Progresiones Aritméticas y Geométricas	31
12	Función Exponencial	33
13	Logaritmos	37
14	Análisis Combinatorio	39
15	Binomio de Newton	41
16	Polinomios	43
17	Ecuaciones de Grado Superior - Parte Uno	45
18	Ecuaciones de Grado Superior - Parte Dos	47
19	Determinantes	49
20	Matrices	53
21	Matriz Inversa. Rango de una Matriz	55
22	Sistemas de Ecuaciones Lineales	57
23	Compatibilidad de Sistemas de Ecuaciones Lineales	59
24	Sistemas Particulares de Ecuaciones Lineales	61
25	Límites de Sucesiones	63
26	Límites de Funciones	65
27	Aplicaciones de Límites de Funciones	67
28	Derivadas	69
29	Aplicaciones de Derivadas	71
30	Interpretación Geométrica de la Derivada	73
31	Integrales	75
32	Tabla de Derivadas y Tabla de Integrales	77
33	Tabla de Derivadas y Tabla de Integrales en Una Página	79
34	Estructuras Algebraicas	81
35	Epílogo	83

FICHA 1: Geometría Plana

Términos Utilizados:

Se considera que los siguientes términos son conocidos desde la escuela secundaria. Asegúrate, sin embargo, de que estén 100% claros para ti:

- recta, semirrecta, segmento, mediatriz de un segmento.
- rectas paralelas, recta secante, ángulos alternos internos, ángulos alternos externos, ángulos correspondientes
- bisectriz de un ángulo
- simétrico: simétrico de un punto respecto a una recta, simétrico de una recta respecto a una recta.
- ángulos: agudo, obtuso, complementario, suplementario
- triángulo: triángulo arbitrario, isósceles, equilátero, rectángulo, triángulos congruentes (casos de congruencia),
- triángulo: triángulos semejantes (casos de semejanza), teorema de Tales.
- triángulo: suma de ángulos en un triángulo, ángulo exterior de un triángulo (qué es y cómo calcularlo),
- triángulo: línea media (qué es y cómo calcularla)

Líneas Importantes en un Triángulo:

• Bisectriz: Divide un ángulo en dos partes iguales. Todo punto sobre la bisectriz equidista de los lados del ángulo. Las bisectrices de un triángulo se intersectan en el centro del círculo inscrito.

• Mediana: Une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. Las medianas de un triángulo se intersectan en el centro de gravedad G del triángulo. G se encuentra a dos tercios del vértice y un tercio de la base.

• Mediatriz: Es perpendicular al punto medio de un segmento. Todo punto sobre la mediatriz equidista de los extremos del segmento. Las mediatrices de un triángulo se intersectan en el centro del círculo circunscrito al triángulo.

• Altura: Es la perpendicular trazada desde un vértice del triángulo al lado opuesto. Las alturas de un triángulo se intersectan en el ortocentro del triángulo ("Orto" significa recto en griego)

Área de un Triángulo Arbitrario:

(1) S= $\frac{base*altura}{2}$

(2) S= $\frac{b*c*sin(A)}{2}$

(3) S= $\frac{a*b*c}{4*R}$, donde R= radio del círculo circunscrito (intersección de mediatrices)

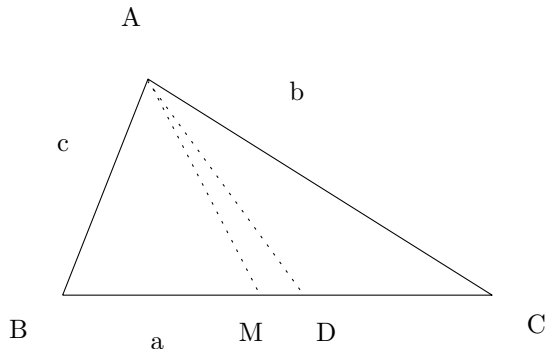
(4) $S = r * p$, donde r= radio del círculo inscrito (intersección de bisectrices), p= semiperímetro=$\frac{a+b+c}{2}$

(5) S= $\sqrt{p*(p-a)*(p-b)*(p-c)}$, donde p=semiperímetro. (Fórmula de Herón)

(6) Idea útil: Expresar el área de dos maneras, en problemas, y encontrar la incógnita

Teoremas en el Triángulo Arbitrario

Sea ABC un triángulo arbitrario, AD= mediana, AM= bisectriz



•Ley de los Senos: $\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)} = 2 * R$, donde R=radio del círculo circunscrito

•Ley de los Cosenos (Teorema de Pitágoras Generalizado):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(A)$

Observaciones:

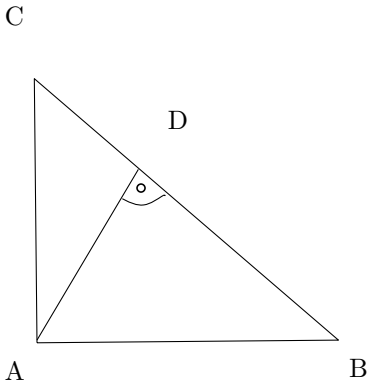
- Para A=agudo, cos(A) > 0, por lo tanto $-2 * b * c * cos(A)$ es una cantidad negativa

- Para A=obtuso, cos(A) < 0, por lo tanto $-2 * b * c * cos(A)$ es una cantidad positiva

•Teorema de la Mediana: $AD^2 = \frac{2*(AB^2+AC^2)-BC^2}{4}$

•Teorema de la Bisectriz: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$

Triángulo Rectángulo Sea ABC un triángulo rectángulo, A= 90° , AD $\perp$ BC



• Fórmulas para sin, cos, tan, cot

• Valores de sin, cos, tan, cot para 30, 60, 45 grados

• B=90-C, por lo tanto sin(B)=cos(C), cos(B)=sin(C), tg(B)=ctg(C), ctg(B)=tg(C), etc.

• Teorema de Pitágoras: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

• Teorema de la Altura: $AD^2 = DB * DC$

• Teorema del Cateto: $AB^2 = BC * DB$, respectivamente $AC^2 = BC * DC$

• El cateto opuesto al ángulo de 30 grados = la mitad de la hipotenusa

• S= $\frac{cateto \cdot cateto}{2}$

Polígonos que Se Pueden Descomponer Fácilmente en Triángulos:

• Cuadrado

• Rectángulo

• Paralelogramo

• Trapecio

• Rombo

Un ejercicio útil es la descomposición de las figuras mencionadas en triángulos y la obtención de las fórmulas de perímetro y área, a partir de las fórmulas presentadas para triángulos.

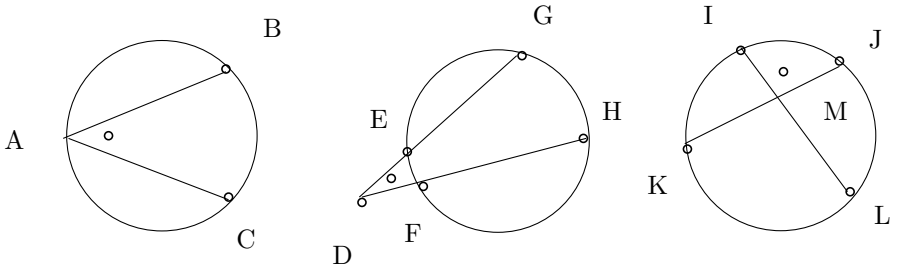
Círculo

- Diámetro=$2 * R$. Perímetro P=$2 * \pi * R$. Área S=$\pi * R^2$.
- Ángulo:

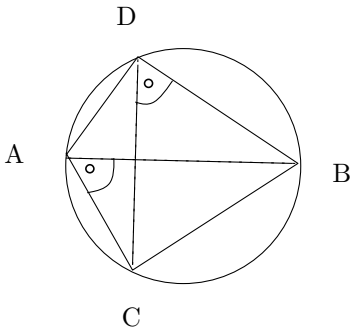
  a) sobre el círculo: $\hat{A} = \widehat{CAB} = \frac{BC}{2}$

  b) exterior: $\hat{D} = \widehat{EDF} = \frac{GH-EF}{2}$

  c) interior: $\hat{M} = \widehat{KML} = \frac{IJ+KL}{2}$ según las figuras:



Cuadrilátero Cíclico Sea ABCD un cuadrilátero cíclico:



En un cuadrilátero cíclico son válidas las dos propiedades siguientes:

- La suma de los ángulos opuestos es 180 grados, es decir $\hat{A} + \hat{B} = 180$, respectivamente $\hat{C} + \hat{D} = 180$.

- El ángulo formado por una diagonal con uno de los lados es igual al ángulo formado por la otra diagonal con el lado opuesto, es decir por ejemplo $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$.

FICHA 2: Fórmulas Trigonométricas:

$$sin(x) = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos(x) = \frac{cateto \quad adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg(x) = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$$

$$ctg(x) = \frac{cateto \quad adyacente}{cateto \quad opuesto}$$

$$tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$tg(x) = \frac{1}{ctg(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)}$$

$sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$ $\quad$ $cos(x) = sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $\quad$ $tg(x) = ctg(\frac{\pi}{2} - x)$ $\quad$ $ctg(x) = tg(\frac{\pi}{2} - x)$

Fórmula fundamental de la trigonometría:

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

Útil: $cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}$ $\quad$ $sin^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$

Si denotamos $tg\frac{x}{2} = t$, entonces sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) pueden expresarse en términos de $tg\frac{x}{2}$ de la siguiente manera:

$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad$ $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad$ $ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{1-t^2}{2t}$

$$sin(a+b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b)$$

$$sin(a-b) = sin(a) * cos(b) - cos(a) * sin(b)$$

$$cos(a+b) = cos(a) * cos(b) - sin(a) * sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a) * cos(b) + sin(a) * sin(b)$$

$$sin(2a) = 2 * sin(a) * cos(a)$$

$$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$$

$$cos(2a) = 2 * cos^2(a) - 1$$

$$cos(2a) = 1 - 2 * sin^2 a$$

$$sin(3a) = sin(a + 2a) = etc...$$

$$cos(3a) = cos(a + 2a) = etc...$$

$$sin(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{2}}$$

$$cos(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{2}}$$

$$tg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{1+cos(a)}}$$

$$ctg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{1-cos(a)}}$$

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)*tg(b)}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)*tg(b)}$$

$$ctg(a+b) = \frac{ctg(a)*ctg(b)-1}{ctg(a)+ctg(b)}$$

$$ctg(a-b) = \frac{1+ctg(a)*ctg(b)}{ctg(b)-ctg(a)}$$

$$tg(a+b+c) = tg([a+b]+c) = \frac{tg[a+b]+tg(c)}{1-tg[a+b]*tg(c)} = etc...$$

$$ctg(a+b+c) = ctg([a+b]+c) = \frac{ctg[a+b]*ctg(c)-1}{ctg[a+b]+ctg(c)} = etc...$$

$$sin(a)*cos(b) = \frac{sin(a+b)+sin(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*cos(b) = \frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*sin(b) = \frac{sin(a+b)-sin(a-b)}{2}$$

$$sin(a)*sin(b) = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$$

$$sin(a)+sin(b) = 2*sin(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$sin(a)-sin(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)+cos(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)-cos(b) = -2*sin(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

El Círculo Trigonométrico

Escribe sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) para x=$30°, 45°, 60°$ y respectivamente
$0°, 90°, 180°, 270°, (360)°$

FICHA 3: El Círculo Trigonométrico

Definición:
El círculo trigonométrico es un círculo de radio R igual a 1 (igual a la unidad)

Consecuencia 1: Expresión de Ángulos en Radianes

- Longitud del círculo = 2π R = 2π*1= 2π
- Longitud del círculo = recorrer el círculo completo, es decir 360 grados
- Por lo tanto Longitud del círculo = 2π = 360
- Consecuentemente: Como 360 grados = 2π, entonces 180 grados = π, de lo cual se sigue que 90 grados = $\frac{\pi}{2}$ y 270 grados = $\frac{3\pi}{2}$

Por ejemplo, nos interesa saber cuántos radianes corresponden a 45 grados.

Partimos de:

180 grados ..... π

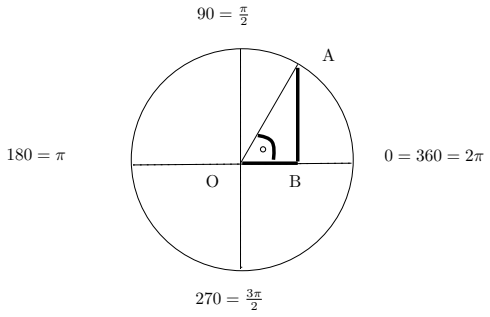
45 grados (por ejemplo)..... x

Aplicamos la regla de tres para calcular x.

Consecuencia 2: Valores de sin, cos, tg, ctg para 0, 90, 180, 270, 360 grados Consideremos el círculo trigonométrico de abajo, por lo tanto radio R=1.

sin(x)=$\frac{AB}{OA}$= $\frac{AB}{R=1}$ = AB, por lo tanto el segmento **AB representa sin(x)**

cos(x)=$\frac{OB}{OA}$= $\frac{OB}{R=1}$ =OB, por lo tanto el segmento **OB representa cos(x)**



1) Para x=0 grados, AB se hace 0 y OB se hace 1 (igual al radio R=1), por lo tanto:
sin(0)=0, cos(0)=1, tg(0) = $\frac{0}{1}$=0, ctg(0)=$\frac{1}{0}$ =∞

2) Para x=90 grados, AB se hace 1 (igual a R=1) y OB se hace 0, por lo tanto:
sin(90)=1, cos(90)=0, tg(90) = $\frac{1}{0}$=∞, ctg(90)=$\frac{0}{1}$ =0

3) Para x=180 grados, AB se hace 0 y OB se hace -1 (igual al radio R=1 en dirección negativa), por lo tanto:
sin(180)=0, cos(180)=-1, tg(180) = $\frac{0}{-1}$=0, ctg(180)=$\frac{-1}{0}$ =-∞

4) Para x=270 grados, AB se hace -1 (igual a R=1 en dirección negativa) y OB se hace 0, por lo tanto:
sin(270)=-1, cos(270)=0, tg(270) = $\frac{-1}{0}$=-∞, ctg(270)=$\frac{0}{-1}$ =0

Consecuencia 3: Valores de sin, cos, tg, ctg para ángulos mayores de 360 grados

Consideramos conocidos de la escuela secundaria sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) para x=30, 60, 45 grados:

Para x=30: Como sin(x)=$\frac{1}{2}$ y cos(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, se sigue que

tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$ =$\frac{\sqrt{3}}{1}$=$\sqrt{3}$

Para x=60, como 60=90-30, sin(60)=cos(30), cos(60)=sin(30), tg(60)=ctg(30), ctg(60)= tg(30), es decir para x=60:
sin(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos(x)=$\frac{1}{2}$, se sigue que tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ = =$\sqrt{3}$ y ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$ =$\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para x=45, como el triángulo rectángulo es isósceles (catetos iguales),
tg(x)=$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$=1,
ctg(x)=$\frac{1}{tg(x)}$=1, siendo los catetos iguales y la hipotenusa la misma, sin(x)=cos(x), es decir igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Es decir para x=45:
sin(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, tg(x)=1 y ctg(x)=1

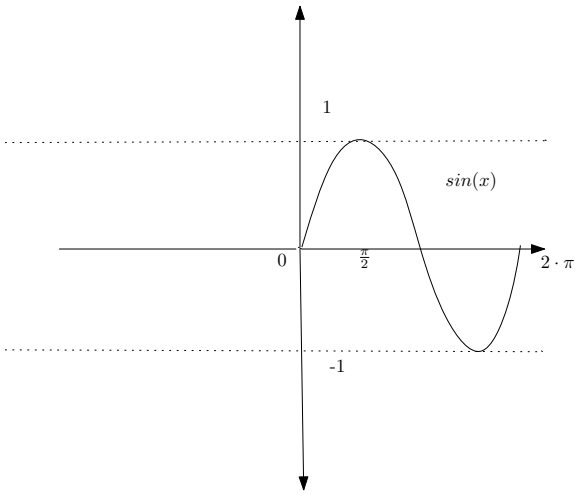
Ejemplo 1: Encontrar sin(750)

Como 360 grados significa **una rotación completa,** , 750 grados significa 720(=360+360= dos rotaciones y regresamos a 0 grados)+30.
Por lo tanto sin(750) significa que el punto A está en la misma posición que para 30 grados.
Es decir sin(750)=sin(30)=$\frac{1}{2}$.
Igualmente para cos(x), tg(x), ctg(x), es decir cos(750)=cos(30), tg(750)=tg(30), ctg(750)=ctg(30).

Ejemplo 2: Encontrar sin($\frac{13\pi}{4}$) Primero transformamos $\frac{13\pi}{4}$ en grados para razonar más fácilmente y obtenemos 585 grados, es decir 585=1* 360+225, lo que significa que tenemos 1 rotación completa y luego otros 225 grados. Por lo tanto sin($\frac{13\pi}{4}$)= sin(225)= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (cuadrante 3, negativo, igual a $-\sin(\pi/4)$)

FICHA 4: Gráficas de Funciones Trigonométricas

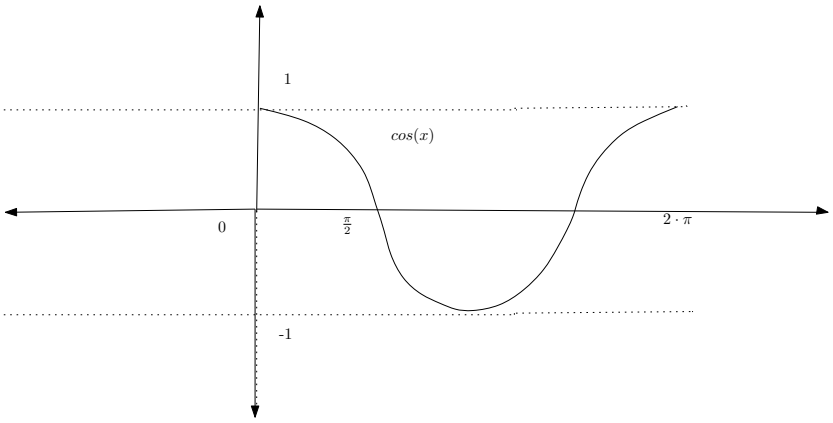
sin(x) : R → [−1, +1]



La función sin(x) tiene período $2 \cdot \pi$, es impar, está definida en R, toma valores entre -1 y +1 y es biyectiva para x $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Por lo tanto la restricción biyectiva sin(x) : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, +1]$ admite una función inversa, arcsin(x) : $[-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cuya gráfica es simétrica respecto a sin(x) con respecto a la primera bisectriz, y=x.

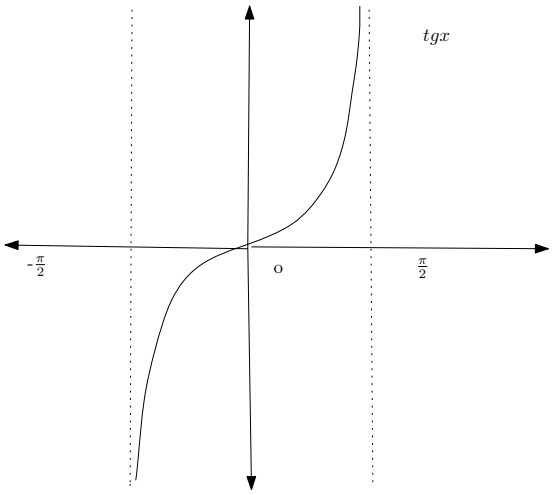
cos(x) : R → [−1, +1]



La función cos(x) tiene período $2 \cdot \pi$, es par, está definida en R, toma valores entre -1 y +1 y es biyectiva para x $\in [0, \pi]$.

Por lo tanto la restricción biyectiva cos(x) : $[0, \pi] \to [-1, +1]$ admite una función inversa, arccos(x) : $[-1, +1] \to [0, \pi]$, cuya gráfica es simétrica respecto a cos(x) con respecto a la primera bisectriz, y=x.

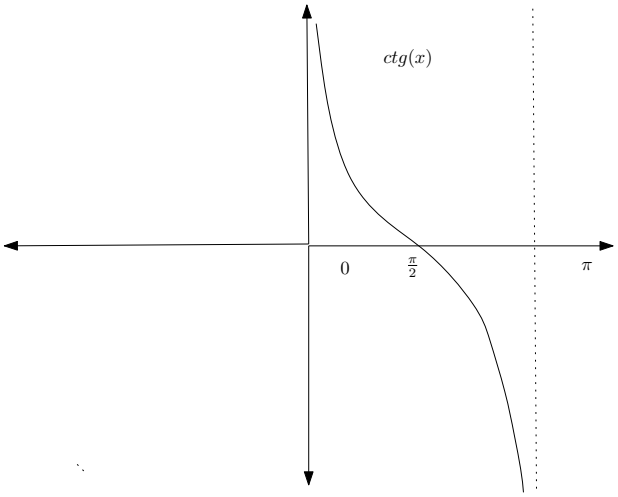
tg(x) : R \ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ } → R



La función tg(x) tiene período π, es impar, está definida en R \ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ }, toma valores entre -∞ y +∞ y es biyectiva para x ∈ $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Por lo tanto la restricción biyectiva tg(x) : $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$ admite una función inversa, arctg(x) : $(-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, cuya gráfica es simétrica respecto a tg(x) con respecto a la primera bisectriz, y=x.

ctg(x) : R \ { $k \cdot \pi$ } → R



La función ctg(x) tiene período π, es impar, está definida en R \ { $k \cdot \pi$ }, toma valores entre -∞ y +∞ y es biyectiva para x ∈ $(0, \pi)$.

Por lo tanto la restricción biyectiva ctg(x) : $(0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ admite una función inversa, arcctg(x) : $(-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$, cuya gráfica es simétrica respecto a ctg(x) con respecto a la primera bisectriz, y=x.

FICHA 5: Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

1. Ecuaciones Trigonométricas Elementales

Se consideran conocidos los siguientes:

- Se consideran conocidos los valores de sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) para x=30°, 45°, 60° y para 90°, 180°, 270°, así como el método de transformación de grados a radianes.
- Se considera conocido el círculo trigonométrico
- Se consideran conocidas las gráficas de las funciones sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x)
- Se considera conocido que sin(x), tg(x), ctg(x) son impares y cos(x) es par. También se sabe que las funciones pares son simétricas respecto al eje y, y las funciones impares son simétricas respecto al origen
- Se considera conocido que sin(x) y cos(x) tienen período $2 \cdot \pi$ y tg(x) y ctg(x) tienen período π

Se considera **ecuación trigonométrica elemental** a una ecuación que tiene una de las siguientes formas:

sin(x)=a , donde a ∈ [-1,1]
cos(x)=b , donde b ∈ [-1,1]
tg(x) =c , donde c ∈ R
ctg(x)=d , donde d ∈ R

La trampa consiste en que resolver estas ecuaciones parece muy simple, pero en realidad es complicado. Por ejemplo para sin(x)=1/2, la primera tentación es dar rápidamente la respuesta x= 30°. La respuesta es correcta pero incompleta, en el sentido de que existen infinitas soluciones, a saber: 30°, 150° (= 180-30) y para cada una de ellas, $+2\pi k$, donde k ∈ Z, es decir para k>0 significa rotaciones en el sentido trigonométrico y para k<0 significa rotaciones en el sentido inverso. Escribiendo el resultado en radianes, la solución completa para la ecuación sin(x)=1/2 es x∈{ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$} U { $\frac{5\cdot\pi}{6} + 2k\pi$}
Para evitar realizar el razonamiento anterior cada vez, es eficiente memorizar las siguientes fórmulas:

sin(x)=a	x=$(-1)^k\cdot$ arcsin(a) + kπ, para a ∈ [0,1]
sin(x)=a	x=$(-1)^{k+1}\cdot$ arcsin$\|a\|$+kπ, para a ∈ [-1,0)
cos(x)=b	x=± arccos(b)+2kπ, para b ∈ [0,1]
cos(x)=b	x=± arccos$\|b\|$+(2k+1)π, para b ∈ [-1,0]
tg(x)=c	x=arctg(c)+kπ
ctg(x)=d	x=arcctg(d)+kπ

Las fórmulas para tg(x)=c y ctg(x)=d son fáciles de recordar.
Para sin(x)=a y cos(x)=b las fórmulas son más difíciles de memorizar; alternativamente se puede recordar el método de deducirlas usando el círculo trigonométrico.

2. Ecuaciones del tipo sin(x)=sin(y)

Para los siguientes tipos:

sin(x)=sin(y)
cos(x)=cos(y)
sin(x)=cos(y)
tg(x) = tg(y)
ctg(x)=ctg(y)

Para llegar a ecuaciones trigonométricas elementales, se recomienda transformar la ecuación inicial, por ejemplo:

Para sin(x) = sin(y) pasamos todo a un lado, sin(x)-sin(y)=0, transformamos en un producto y obtenemos $2cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2} = 0$, es decir $cos\frac{x+y}{2} = 0$ o $sin\frac{x-y}{2} = 0$, y resolvemos cada ecuación por separado.

Para sin(x)=cos(y), escribimos sin(x)=sin($\frac{\pi}{2}$-y) y luego procedemos de manera similar al problema anterior.

3. Inecuaciones Trigonométricas Elementales

Se considera **inecuación trigonométrica elemental** a una inecuación que tiene una de las siguientes formas:

sin(x) > a
cos(x) > b
tg(x) > c
ctg(x) > d

El signo puede ser > , < , >= ,<= , etc.

Para evitar memorizar otras fórmulas, se recomienda resolver estas inecuaciones de la siguiente manera:

• Para $sin(x) > a$ y $cos(x) > b$ analizamos el **círculo trigonométrico**, teniendo en cuenta las rotaciones $2 \cdot k \cdot \pi$, donde k $\in$ Z.

• Para $tg(x) > c$ y $ctg(x) > d$ analizamos la **gráfica de la función tg(x), respectivamente ctg(x)**, teniendo en cuenta que tg(x) y ctg(x) tienen período π

4. RESOLUCIÓN EFECTIVA de Ecuaciones Trigonométricas (respectivamente Inecuaciones Trigonométricas)

En principio seguimos los siguientes pasos:

1. Transformamos la ecuación dada, respectivamente la inecuación, hasta llegar a una **ecuación elemental**, respectivamente inecuación elemental. La transformación se realiza usando diversas técnicas y las fórmulas trigonométricas habituales. Entre estas fórmulas, son particularmente útiles: la fórmula fundamental de la trigonometría, la expresión de sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) en términos de $tg\frac{x}{2}$, la expresión de sin(x) y cos(x) en términos de tg(x), las fórmulas de ángulo medio, que tienen radicales, en caso de que el enunciado contenga funciones al cuadrado y deseemos eliminar los cuadrados, etc. Se recomienda el dominio de las fórmulas trigonométricas.

2. Resolvemos la **ecuación elemental**, respectivamente la inecuación elemental, según los métodos presentados anteriormente.

FICHA 6: Números Complejos

A. Forma Algebraica de los Números Complejos

Todo comienza con el número $i = \sqrt{-1}$

• **Cálculos** con **i**:

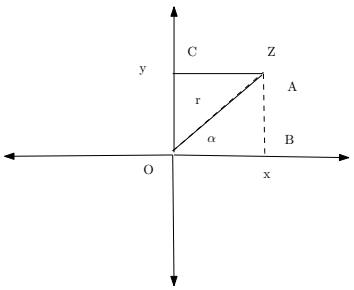
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = +1$
Se observa que i^4=1, por lo tanto i elevado a cualquier potencia que sea múltiplo de 4 es igual a 1. Esta observación es útil para calcular expresiones que contienen i^n.

Por ejemplo $i^{30} = i^{28} \cdot i^2 = (i^4)^7 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

• **Nuevos Términos** Sea z=x+yi un número complejo (forma algebraica).
-x se llama la *parte real* del número complejo e **y** se llama la *parte imaginaria* del número complejo.
-el conjugado de z se denota por $\bar{z}$ y se define como $\bar{z}$=x-yi

B. Forma Trigonométrica de los Números Complejos

Sea z=x+yi un número complejo (forma algebraica).
Consideremos la siguiente representación gráfica:



Podemos escribir:
$sin(\alpha) = \frac{y}{r}$ por lo tanto y=r·$sin(\alpha)$, respectivamente

$cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ por lo tanto x=r·$cos(\alpha)$

z=x+yi= r·$cos(\alpha)$+r·$sin(\alpha)$·i= $r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$

• La forma z=x+yi se llama la *forma algebraica del número complejo.* **x** se llama la *parte real* del número complejo e **y** se llama la *parte imaginaria* del número complejo.

• La forma z=$r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$ se llama la *forma trigonométrica del número complejo.* **r** se llama el *módulo* del número complejo y α se llama el *argumento* del número complejo.

C. Escritura de un Número Complejo en Forma Trigonométrica

Dado un número complejo z=x+yi. Escribe el número en forma trigonométrica, es decir z=r(cosα +i sinα)

1. Determinar el cuadrante, basándose en los signos de x e y
2. Calcular $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. Calcular $tg\alpha^* = |\frac{y}{x}|$ se sigue que α^*= arctg$|\frac{y}{x}|$, siendo siempre α^* un ángulo del primer cuadrante, porque $\frac{y}{x}$ se toma en valor absoluto.
4. Calcular α a partir de α^* y del cuadrante determinado en el paso 1, de la siguiente manera:

   Para el cuadrante 1, tomar $\alpha = \alpha^*$
   Para el cuadrante 2, tomar $\alpha = \pi - \alpha^*$
   Para el cuadrante 3, tomar $\alpha = \pi + \alpha^*$
   Para el cuadrante 4, tomar $\alpha = 2\pi - \alpha^*$

5. Escribir el número complejo en forma trigonométrica, es decir z=r(cosα +i sinα)

D. Fórmulas Útiles para Números Complejos en Forma Trigonométrica

Sea z_1=r$_1$(cosα_1 +i sinα_1) , z_2=r$_2$(cosα_2 +i sinα_2) , z=r(cosα +i sinα) ,

(1) *Multiplicación:* $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

(2) *División:* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

Como $z^n = z \cdot z \cdot z .... \cdot z = r \cdot r \cdot ...r[cos(\alpha + \alpha + \cdots + \alpha) + i \cdot sin(\alpha + \alpha \cdots + \alpha)]$

obtenemos:

(3) *Potencia:* $z^n = r^n[cos(n \cdot \alpha) + i \cdot sin(n \cdot \alpha)]$

(4) *Radical:* $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha+2k\pi}{n})$

FICHA 7: Fórmulas Algebraicas:

Fórmulas para $(a \pm b)^n$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2*a*b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2*a*b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3*a^2*b + 3*a*b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3*a^2*b + 3*a*b^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = (a-b)^3*(a-b) \qquad etc...$$

Fórmulas para $a^n \pm b^n$

$$a^2 - b^2 = (a-b)*(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)*(a^2 + a*b + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)*(a^2 - a*b + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)*(a^{n-1} + a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 + ... + b^{n-1})$$

(para todo número natural n)

$$a^n + b^n = (a+b)*(a^{n-1} - a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 - .... + b^{n-1})$$

(válido para n impar)

Sumas

$S_1 = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n*(n+1)}{2}$ S_1 también se denota como $\sum_{k=1}^{n} k$

$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$ S_2 también se denota como $\sum_{k=1}^{n} k^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = (\frac{n*(n+1)}{2})^2$ S_3 también se denota como $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Ejemplo: Calcular la suma $S = 1*2 + 2*3 + ... + n*(n+1)$

Solución: S$= \sum_{k=1}^{n} k*(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = S_2 + S_1 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} + \frac{n*(n+1)}{2}$

Potencias y Radicales

$$(a*b)^m = a^m * b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Fórmula de Radicales Compuestos:
$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, donde $C = +\sqrt{A^2 - B}$.

Ejemplo: Calcular la expresión E=$\sqrt{6 - \sqrt{11}}$.

Solución: Calculo C=$\sqrt{6^2 - 11} = \sqrt{25} = 5$, por lo tanto E=$\sqrt{\frac{6+5}{2}} - \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

FICHA 8: Ecuación y Función Cuadrática

Ecuación de Segundo Grado

$$a * x^2 + b * x + c = 0, \quad donde \quad a \neq 0$$

- Raíces $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2*a}$ donde $\Delta = b^2 - 4 * a * c$
- Para $\Delta > 0$ existen dos raíces reales, x_1 y x_2 , con $x_1 \neq x_2$
- Para $\Delta = 0$ existen dos raíces reales, iguales y coincidentes, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2*a}$
- Para $\Delta < 0$ no existen raíces reales, o dicho de otro modo, existen dos raíces complejas x_1 y x_2
- Relaciones de Vieta: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $P = x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$

- Encontrar la ecuación si se conocen la suma y el producto de las raíces (por ejemplo sabemos que S=10 y P=20).
La ecuación es: $x^2 - S * x + P = 0$
Para el ejemplo anterior obtenemos la ecuación: $x^2 - 10 * x + 20 = 0$

Función de Segundo Grado

$$y = a * x^2 + b * x + c, \quad donde \quad a \neq 0$$

- La gráfica de la función de segundo grado es una parábola
- Signo de la función de segundo grado:

Regla: *Entre las raíces signo opuesto a a, fuera de las raíces el signo de a, en las raíces igual a cero.*

La aplicación de la regla depende de Δ de la siguiente manera:
- Para $\Delta > 0$ es exactamente según la regla.
- Para $\Delta = 0$, NO existe zona entre raíces, por lo tanto la función será igual a cero en las raíces, y en caso contrario tendrá el signo de a.
- Para $\Delta < 0$, no existen ni raíces ni la zona entre raíces, por lo tanto la función siempre tendrá el signo de a.

- **Representación gráfica de la función de segundo grado.** Seguir los pasos:

1) Si a > 0, la función tiene un mínimo y si a < 0 tiene un máximo.

2) Para el mínimo y máximo también se usa el término "Vértice" o "punto extremo". Es un punto llamemos $V(x_v, y_v)$. Representa el punto más bajo de la gráfica en el caso del mínimo, respectivamente el punto más alto en el caso del máximo. Calcular las coordenadas del vértice $V(x_v, y_v)$ con la fórmula $x_v = \frac{-b}{2*a}$ y $y_v = \frac{-\Delta}{4*a}$, así prácticamente calcular el vértice $V(\frac{-b}{2*a}, \frac{-\Delta}{4*a})$.

3) Encontrar la intersección con el eje Ox, haciendo y=0 en la expresión $y = a * x^2 + b * x + c$, es decir prácticamente resolver la ecuación $a * x^2 + b * x + c = 0$. Los valores obtenidos para x representan las intersecciones con Ox. Por ejemplo si obtenemos dos valores x_1 y x_2, los puntos de intersección con Ox serán $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

4) Encontrar la intersección con el eje Oy, haciendo x=0 en la expresión $y = a * x^2 + b * x + c$, es decir obtenemos $y = a * 0^2 + b * 0 + c$,

lo que significa que siempre obtenemos y=c. El punto (0,c) representa la intersección de la gráfica con Oy.

5) Trazar la gráfica usando los datos anteriores, en el siguiente orden: Trazar los ejes XOY, trazar el vértice V, trazar la forma del vértice (mínimo o máximo), trazar las intersecciones con Ox y la intersección con Oy y unir los puntos obtenidos. Tener en cuenta que la gráfica es simétrica respecto al eje de simetría que pasa por el vértice.

- **Monotonía:**

- La función es decreciente desde $-\infty$ hasta $x_{vertice}$ y creciente a partir de allí, desde $x_{vertice}$ hasta $+\infty$ (si el Vértice es un mínimo, es decir para $a > 0$). Respectivamente,

- La función es creciente desde $-\infty$ hasta $x_{vertice}$ y decreciente a partir de allí, desde $x_{vertice}$ hasta $+\infty$ (si el Vértice es un máximo, es decir para $a < 0$).

FICHA 9: Signo de la Función Cuadrática

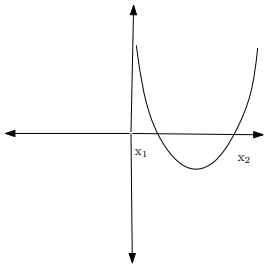
$y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$

La gráfica de la función de segundo grado es una parábola. Si a>0, la gráfica de la función tiene un mínimo, y si a<0, la gráfica de la función tiene un máximo. El mínimo, respectivamente máximo se llama vértice, respectivamente punto extremo. El vértice tiene coordenadas $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

Existen tres situaciones diferentes, dependiendo de si $\Delta > 0$ o $\Delta = 0$ o $\Delta < 0$

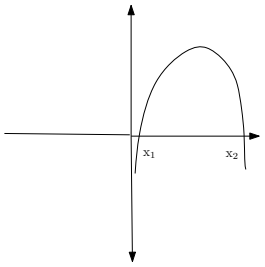
1. Para $\Delta > 0$, existen dos raíces reales diferentes, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

La gráfica puede ser del siguiente tipo:



$\Delta > 0$ *si* $a > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	+ + +	0	- - -	0	+ + +



$\Delta > 0$ *si* $a < 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$y=ax^2+bx+x$	+ + +	0	- - -	0	+ + +

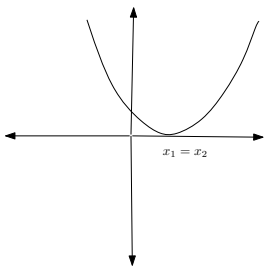
Del análisis de las gráficas se pueden extraer las siguientes observaciones:

• Entre las raíces la función de segundo grado tiene signo opuesto a a, y fuera de las raíces tiene el signo de a. En las raíces, la función es igual a cero.

• Para $\Delta > 0$, la función no tiene signo constante, siendo positiva en ciertos intervalos y negativa en otros.

2. Para $\Delta = 0$, existen dos raíces reales iguales, $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

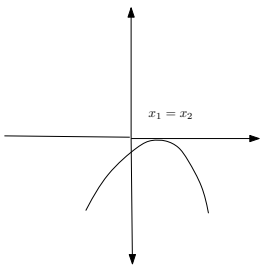
La gráfica puede ser del siguiente tipo:



$\Delta = 0$ *si* $a > 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	+ + +	0	+ + +

$y >= 0$



$\Delta = 0$ *si* $a < 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$y=ax^2+bx+x$	- - -	0	- - -

$y <= 0$

Del análisis de las gráficas se pueden extraer las siguientes observaciones:

• El intervalo entre raíces *ha desaparecido, siendo las raíces iguales, respectivamente coincidentes*, por lo tanto la función de segundo grado vale cero en las raíces y en caso contrario tiene el signo de a.

• Para $\Delta = 0$, la función **no cambia de signo** siendo positiva o igual a cero para $a > 0$, respectivamente negativa o igual a cero para $a < 0$.

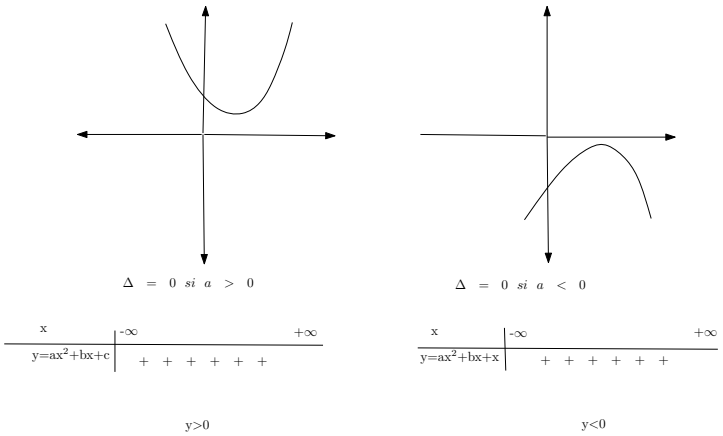
• Si en un problema es necesario imponer la condición $y >= 0$, imponemos las condiciones $\Delta \leq 0$ y $a > 0$.

• Si en un problema es necesario imponer la condición $y <= 0$, imponemos las condiciones $\Delta \leq 0$ y $a < 0$.

---

3. Para $\Delta < 0$, no existen raíces reales

La gráfica puede ser del siguiente tipo:



Del análisis de las gráficas se pueden extraer las siguientes observaciones:

• La función de segundo grado tiene el signo de a.

• Para $\Delta < 0$, la función **no cambia de signo** siendo positiva para $a > 0$, respectivamente negativa para $a < 0$.

• Si en un problema es necesario imponer la condición $y > 0$(estricta), imponemos las condiciones $\Delta < 0$ y $a > 0$.

• Si en un problema es necesario imponer la condición $y < 0$(estricta), imponemos las condiciones $\Delta < 0$ y $a < 0$.

FICHA 10: Funciones Inyectivas, Sobreyectivas, Biyectivas

Inyectividad

Definición Sea f: A → B una función. La función f es inyectiva si para $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in A$

La demostración de la inyectividad puede realizarse por varios métodos, la elección del método depende del tipo de función analizada. Por ejemplo:

1. Si f(x) puede **representarse gráficamente**, para que f(x) sea inyectiva, **cualquier recta paralela a Ox, trazada a través de B, debe intersectar la gráfica de la función en un punto o en ninguno.** En otras palabras, cualquier recta paralela a Ox a través del codominio, debe intersectar la gráfica de la función en a lo sumo un punto.

2. Si f(x) puede **representarse mediante un diagrama**, usualmente para problemas donde el dominio de definición A es un conjunto finito, la función no es inyectiva si existen valores en el codominio a los que corresponde más de un elemento del dominio de definición.

3. Si f(x) no puede representarse ni gráficamente ni mediante un diagrama, se puede intentar **por cálculo algebraico**, es decir consideramos $x_1 \neq x_2$ e intentamos mostrar que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prácticamente partimos de la diferencia $f(x_1) - f(x_2)$ y mediante varios cálculos intentamos mostrar que esta diferencia es distinta de cero. Alternativamente podemos partir del cociente $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ y tratar de demostrar que este cociente es distinto de 1.

4. La inyectividad también puede verificarse usando material de **análisis matemático**, estudiado en el 11.° grado. Prácticamente, para la función f(x) calculamos la derivada f'(x) y si demostramos que f'(x) es siempre positiva en el dominio de definición, significa que la función f(x) es creciente. Si la función es creciente, automáticamente significa que la función es inyectiva, porque $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

De manera similar, si en cambio obtenemos f'(x) siempre negativa en el dominio de definición, significa que la función f(x) es decreciente. Si la función es decreciente, automáticamente significa que la función es inyectiva, porque $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se observa que usamos la propiedad de que una función monótona (sea creciente o decreciente) es inyectiva. El estudio de la monotonía de la función se realizó mediante el estudio del signo de la derivada de la función. El hecho de que f'>0 significa que f es creciente, respectivamente si f'<0 significa que f es decreciente, representa consecuencias del teorema de Lagrange.

Sobreyectividad

Definición Sea f: A → B una función. La función f es sobreyectiva si para todo y ∈ B, existe x ∈ A, tal que y=f(x).

La demostración de la sobreyectividad puede realizarse por varios métodos, la elección del método depende del tipo de función analizada. Por ejemplo:

1. Si f(x) puede **representarse gráficamente**, para que f(x) sea sobreyectiva, **cualquier recta paralela a Ox, trazada a través de B, debe intersectar la gráfica de la función en un punto o más.** En otras palabras, cualquier recta paralela a Ox a través del codominio, debe intersectar la gráfica de la función en al menos un punto.

2. Si f(x) puede **representarse mediante un diagrama**, usualmente para problemas donde el dominio de definición A es un conjunto finito, la función no es sobreyectiva si existen valores en el codominio a los que **no corresponde ningún elemento del dominio de definición.**

3. Si f(x) no puede representarse ni gráficamente ni mediante un diagrama, se puede intentar **por cálculo algebraico**, es decir **denotar f(x) como y y luego resolver x en función de y.** De esta expresión de x en función de y, **analizar si para todo y del codominio, existe un x correspondiente del dominio de definición.**
Por ejemplo para f:R $\to$ R, f(x)=x^2+1, hacemos y=x^2+1 y resolvemos x=$\pm\sqrt{y-1}$. Para que el radical exista necesitamos y-1 >=0, es decir y>=1, es decir y $\in$ [1,∞). Siendo el codominio R, significa que para y $\in$ (-∞,1) no existe un x $\in$ R correspondiente tal que y=f(x), por lo tanto la función no es sobreyectiva.

4. La sobreyectividad también puede verificarse usando material de **análisis matemático**, estudiado en el 11.° grado. Se usa la noción de continuidad de una función y la propiedad de Darboux. Por ejemplo para f(x)=2^x+3^x, como la función es continua, tiene la propiedad de Darboux, por lo tanto es sobreyectiva. Recordamos la **propiedad de Darboux:**

Una función tiene la propiedad de Darboux si transforma un intervalo en otro intervalo. Es decir, para f: I $\to$ J, decimos que f tiene la propiedad de Darboux si, siendo el dominio de definición I un intervalo, obtenemos mediante la función f, el codominio J también como un intervalo. Las funciones continuas tienen la propiedad de Darboux. Por lo tanto si I=intervalo, establecer la sobreyectividad se reduce a estudiar la continuidad de la función e invocar la implicación de la continuidad sobre la propiedad de Darboux.

Biyectividad

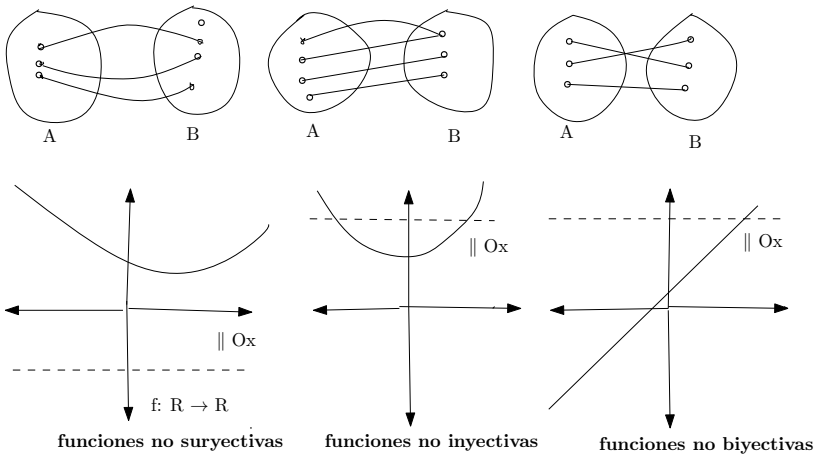
Definición Sea f: A $\to$ B una función. La función f es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

El estudio de la biyectividad se reduce a verificar, sucesivamente, la inyectividad y la sobreyectividad según los métodos presentados anteriormente. Si la función es a la vez inyectiva y sobreyectiva, concluimos que la función es biyectiva, de lo contrario concluimos que la función no es biyectiva.

Se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. En el caso en que se use **representación gráfica,** para que una función sea biyectiva, es decir tanto inyectiva como sobreyectiva, **cualquier recta paralela a Ox, trazada a través de B, debe intersectar la gráfica de la función exactamente en un punto**.

2. En el caso en que se use **representación mediante diagrama,** para que una función sea biyectiva, es decir tanto inyectiva como sobreyectiva, en el diagrama debe haber una correspondencia 1 a 1, es decir a cada elemento x $\in$ A le corresponde exactamente un elemento y $\in$ B y viceversa. En otras palabras, debe haber una **correspondencia 1 a 1**, que también se llama **correspondencia uno a uno**. **Ejemplos:**



FICHA 11: Progresiones Aritméticas. Progresiones Geométricas

Progresiones Aritméticas

• Definición: Progresión aritmética = una sucesión $a_1, a_2, ..., a_n$ con la propiedad de que cada término es igual al término anterior más la razón (denotada r). En otras palabras, $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, etc. Más precisamente, $a_n - a_{n-1} = r$ para $n >= 2$. Es decir una P.A. es una sucesión $a_1, a_2, ..., a_n$ con la propiedad de que

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$$

Esta es la fórmula 1. La razón puede ser positiva o negativa.
Es necesario que n sea >= 2, porque a_1 no tiene término anterior.

• Fórmula 2 = Expresión de a_n en función del primer término (a_1) y la razón (r).
Como $a_1 = a_1$
Como $a_2 = a_1 + r$
Como $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 * r$
Como $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3 * r$, etc., obtenemos la fórmula:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) * r}$$

• Fórmula 3 = Verificación si tres números están en progresión aritmética
Para verificar si los números A, B, C están en P.A., verificamos si se cumple la condición:

$$\mathbf{B = \frac{A + C}{2}}$$

es decir si el término del medio es la media aritmética de sus vecinos.
Es natural que así sea, porque A= B - r, C= B+r, por lo tanto $A + C = 2 * B$

• Fórmula 4 = Suma de una progresión aritmética
Para la progresión aritmética $a_1, a_2, ..., a_n$, la suma

$$\mathbf{S = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}}$$

Es fácil de recordar con la formulación

$$\mathbf{S = \frac{(PrimerTrmino + ltimoTrmino) * n}{2}}$$

La demostración es simple, a saber:
$S=a_1+a_2+...+a_n = a_1+(a_1+r)+(a_1+2*r)+(a_1+3*r)+....(a_1+(n-1)*r)$
$= (a_1*n+r+2*r+3*r+...(n-1)*r) = n*a_1+r*(1+2+...+(n-1)) =$
$= n * a_1 + r * \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = n * a_1 + \frac{r*n*(n-1)}{2} = \frac{2*a_1+(n-1)*r}{2} * n =$
$\frac{a_1+a_1+(n-1)*r}{2} * n$
Por lo tanto S=$\frac{(a_1+a_n)*n}{2}$

• Fórmula 5 = Suma de una progresión aritmética, fórmula alternativa
Si expresamos $a_n = a_1 + (n - 1) * r$ en la fórmula anterior, obtenemos otra fórmula para S, a saber:

$$\mathbf{S = \frac{(2 * a_1 + (n - 1) * r) * n}{2}}$$

Recomendación: Si en el problema se conocen el primer y el último término, la fórmula 4 es útil, y si se conocen el primer término y la razón, la fórmula 5 es útil. En ambas situaciones necesitamos conocer el número de términos de la progresión, denotado por n.

Progresiones Geométricas

• Definición: Progresión geométrica = una sucesión $b_1, b_2, ..., b_n$ con la propiedad de que cada término es igual al término anterior multiplicado por la razón (denotada q). En otras palabras, $b_2 = b_1 * q$, $b_3 = b_2 * q$, etc. Más precisamente, $b_n = b_{n-1} * q$ para $n >= 2$. Es decir una P.G. es una sucesión $b_1, b_2, ..., b_n$ con la propiedad de que

$$\mathbf{b_n = b_{n-1} * q}$$

Esta es la fórmula 1. La razón puede ser positiva o negativa.
Es necesario que n sea >= 2, porque b_1 no tiene término anterior.

• Fórmula 2 = Expresión de b_n en función del primer término (b_1) y la razón (q).
Como $b_1 = b_1$
Como $b_2 = b_1 * q$
Como $b_3 = b_2 * q = b_1 * q^2$
Como $b_4 = b_3 * q = b_1 * q^3$, etc., obtenemos la fórmula:

$$\mathbf{b_n = b_1 * q^{n-1}}$$

• Fórmula 3 = Verificación si tres números están en progresión geométrica
Para verificar si los números A, B, C están en P.G., verificamos si se cumple la condición:

$$\mathbf{B^2 = A * C}$$

(el caso general), respectivamente $B = \sqrt{A \cdot C}$ para $A, B, C > 0$
es decir si el término del medio es la media geométrica de sus vecinos.
Es natural que así sea, porque $A = \frac{B}{q}$, $C = B * q$, por lo tanto $A * C = B^2$

• Fórmula 4 = Suma de una progresión geométrica
Para la progresión geométrica $b_1, b_2, ..., b_n$, la suma

$$\mathbf{S = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 * (\frac{q^n - 1}{q - 1})}$$

La demostración es simple, a saber:
S=$b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 + (b_1 * q) + (b_1 * q^2) + (b_1 * q^3) + ...(b_1 * q^{n-1})$
$= b_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}) = b_1 * (\frac{q^n - 1}{q - 1})$ Q.E.D.

Usamos la fórmula $x^n - 1^n = (x - 1) * (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$ donde en el papel de x usamos q y extrajimos $(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

FICHA 12: Función Exponencial

$y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$

Existen dos situaciones diferentes, dependiendo de si a>1 o a∈(0,1)

Justificación del hecho de que $a>0$, $a\neq 1$

El valor de **a no puede tomar** los siguientes valores:

-No debe ser que a sea igual a 0, porque 0 elevado a cualquier potencia es 0.

-No debe ser que a sea igual a 1, porque 1 elevado a cualquier potencia es 1.

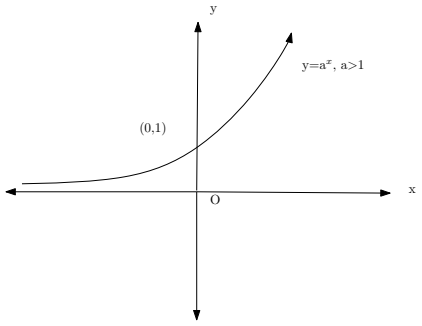
-No debe ser que a sea negativo. Por ejemplo si tenemos a=-3 y x=$\frac{1}{2}$, obtendríamos $a^x = (-3)^{\frac{1}{2}}$, es decir $a^x = \sqrt{-3}$, es decir la raíz cuadrada de un número negativo, que no pertenece a R.

De los valores a ∈ R, si eliminamos a=0, a=1 y a<0, obtenemos dos intervalos permitidos, a saber a ∈ (0,1) y a ∈ (1,∞), o dicho de otro modo, a>0 y a ≠1

Caso 1. a>1 Por ejemplo sea $y=2^x$. Trazamos la gráfica de la función por puntos, dando valores a x:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
y		1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	

Obtenemos la siguiente gráfica:



Del análisis de la gráfica se pueden extraer las siguientes observaciones:

• La función y=a^x, a> 1 está definida en R y toma valores en (0,∞), es decir
f: R $\rightarrow$ (0,∞), por lo tanto el dominio de definición es R, y el codominio es (0,∞).
Se observa que cualquier recta paralela al eje Ox, trazada a través del codominio intersecta la gráfica de la función exactamente en un punto, por lo tanto la función es biyectiva.
Al ser biyectiva, significa que es a la vez sobreyectiva e inyectiva.
Debido al hecho de que es inyectiva, es decir si f(x_1)=f(x_2) significa que x_1=x_2, en el caso en que obtengamos una ecuación de la forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, podemos concluir que f(x)=g(x).

• $a^x > 0$ para todo x $\in$ R.
Por lo tanto si obtenemos una ecuación por ejemplo 5^x=-25 significa que la ecuación no tiene soluciones, porque 5^x es siempre positivo.

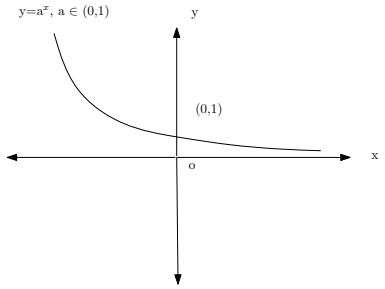
• La función a^x, para a> 1 es **creciente**, es decir si $x_1 < x_2$ significa que $f(x_1) < f(x_2)$ y viceversa. Si obtenemos una inecuación, por ejemplo 2^x <8, podemos concluir que x< 3.

• Como a^0=1, la gráfica de la función y=a^x pasa por el punto (0,1) para todo a> 1

Caso 2. **a∈(0,1)** Por ejemplo sea y=$(\frac{1}{2})^x$. Trazamos la gráfica de la función por puntos, dando valores a x:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
y		8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	

Obtenemos la siguiente gráfica:



Del análisis de la gráfica se pueden extraer las siguientes observaciones:

• La función y=a^x, a∈ (0,1) está definida en R y toma valores en (0,∞), es decir
f: R → (0,∞), por lo tanto el dominio de definición es R, y el codominio es (0,∞). Se observa que cualquier recta paralela al eje Ox, trazada a través del codominio intersecta la gráfica de la función exactamente en un punto, por lo tanto la función es biyectiva. Al ser biyectiva, significa que es a la vez sobreyectiva e inyectiva. Debido al hecho de que es inyectiva, es decir si f(x_1)=f(x_2) significa que x_1=x_2, en el caso en que obtengamos una ecuación de la forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, podemos concluir que f(x)=g(x).

• $a^x > 0$ para todo x ∈ R. Por lo tanto si obtenemos una ecuación por ejemplo $(\frac{1}{5})^x$=-$(\frac{1}{25})$ significa que la ecuación no tiene soluciones, porque $(\frac{1}{5})^x$ es siempre positivo.

• La función a^x, para a∈ (0,1) es **decreciente**, es decir si $x_1 < x_2$ significa que $f(x_1) > f(x_2)$ y viceversa. Si obtenemos una inecuación por ejemplo $(\frac{1}{2})^x < \frac{1}{8}$, podemos concluir que x> 3.

• Como a^0=1, la gráfica de la función y=a^x pasa por el punto (0,1) para todo a∈ (0,1).

• **Prácticamente para resolver ecuaciones exponenciales** intentamos llegar mediante diversas técnicas a una ecuación de la forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, de la cual concluimos que f(x)=g(x).

• **Prácticamente para resolver inecuaciones exponenciales** intentamos llegar mediante diversas técnicas a una inecuación de la forma $a^{f(x)}$ < $a^{g(x)}$, que se interpreta según el valor de a, a saber si a> 1 preservamos el signo de la inecuación entre f(x) y g(x), respectivamente si a∈ (0,1), invertimos el signo de la inecuación entre f(x) y g(x).

• Es útil recordar las fórmulas de potencias
$(a^m)^n = a^{m*n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, a^0=1, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

• **La función exponencial** y=a^x : R → (0,∞) al ser biyectiva, admite una función inversa, a saber **la función logarítmica** y=$\log_a^x$: (0,∞) → R, cuya gráfica es simétrica respecto a y=a^x con respecto a la primera bisectriz, y=x. Naturalmente se generan dos situaciones para $\log_a^x$, a saber para a>1 y para a∈(0,1).

FICHA 13: Logaritmos

Fórmulas:

1) Definición: log_a^X es un número N, con la propiedad de que,

$$\text{si } log_a^X = N, \text{ entonces } X = a^N$$

Por ejemplo $log_{10}^{100} = 2$ porque $100 = 10^2$

2) $log_a^A + log_a^B = log_a^{A*B}$

3) $log_a^A - log_a^B = log_a^{\frac{A}{B}}$

4) $log_a^{A^m} = m * log_a^A$

5) $log_a^a = 1$

6) $log_{a=vieja}^X = \frac{log_{b=nueva}^X}{log_{b=nueva}^{a=vieja}}$

7) $log_{a^m}^X = \frac{1}{m} * log_a^X$

8) $log_a \sqrt[m]{X^n} = log_a^{X^{\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m} * log_a^X$

Dominio de definición:

Para $log_a A$ es necesario que

- A >0 $\rightarrow$ obtenemos por ejemplo x pertenece al intervalo I_1
- a >0 y a $\neq$1 $\rightarrow$ obtenemos por ejemplo x pertenece al intervalo I_2

El dominio de definición es I_1 intersectado con I_2

Base del logaritmo:

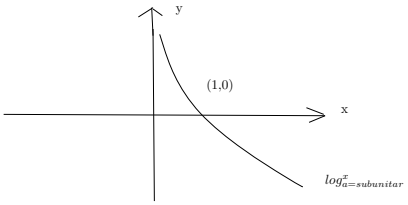
- lg^X significa log_{10}^X, es decir *logaritmo decimal (o común)*
- ln^X significa log_e^X, es decir *logaritmo natural*, donde e$\approx$2.718

Base subunitaria o superunitaria.

Debido a la condición del *dominio de definición*, para log_a^X, como necesitamos $a > 0$ y $a \neq 1$, prácticamente existen dos situaciones para la base del logaritmo:

-CASO 1: a entre (0,1). En este caso, la función logarítmica es decreciente, por ejemplo si sabemos que a está entre (0,1) y obtenemos en un problema $log_a^A < log_a^B$, podemos extraer la conclusión de que $A > B$.

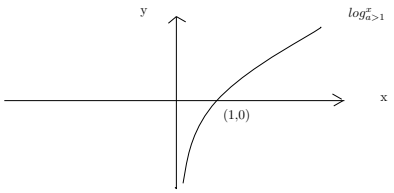
La gráfica de la función logarítmica, para base **subunitaria** es la siguiente:



Del gráfico se puede observar lo siguiente:

- $log_a^X : (0, \infty) \to R$
- la función es decreciente
- $log_a^1 = 0$
- la función es positiva para X entre (0,1)
- la función es cero para X=1
- la función es negativa para X>1.

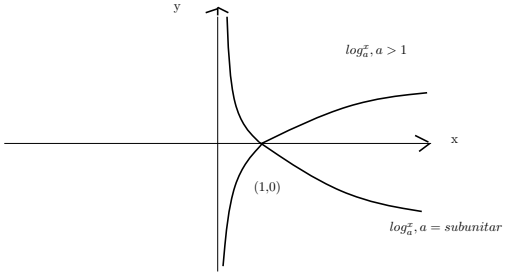
- **CASO 2: a entre (1,∞)** En este caso, la función logarítmica es creciente, por ejemplo si sabemos que a está entre (1,∞) y obtenemos en un problema $log_a^A < log_a^B$, podemos extraer la conclusión de que $A < B$. La gráfica de la función logarítmica, para base **superunitaria** es la siguiente:



Del gráfico se puede observar lo siguiente:

- $log_a^X : (0, \infty) \to R$
- la función es creciente
- $log_a^1 = 0$
- la función es negativa para X entre (0,1)
- la función es cero para X=1
- la función es positiva para X>1.

Ambos casos pueden sintetizarse en una sola gráfica:



FICHA 14: Análisis Combinatorio

Factorial, Permutaciones, Variaciones, Combinaciones

Factorial

• Por definición **n factorial** se denota como **n!** y tiene la siguiente fórmula de cálculo:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$$

• Ejemplos:

a) 3!=$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

b) 1!=1

c) 0!=1 (sorprendente a primera vista, se explicará más adelante)

• De esto se obtienen las siguientes fórmulas:

n!=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$, por lo tanto también puede escribirse como:

n!=(n-1)!$\cdot n$

n!=(n-2)!$\cdot (n-1) \cdot n$

n!=(n-3)!$\cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, etc.

Permutaciones

• **Las Permutaciones de n elementos** se denotan como P_n y tienen la siguiente fórmula de cálculo:

$$P_n = n!$$

por lo tanto $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$

• Ejemplo:

a) $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

• Qué significa "Permutaciones de n elementos"

Si tenemos por ejemplo n=3 elementos $\{a, b, c\}$, P_3 nos indica **de cuántas maneras** podemos "permutar (= intercambiar entre sí los 3 elementos)", de modo que formen "grupos" que:

a) contengan todos los n elementos (tanto a como b como c)

b) ningún elemento se repite.

Prácticamente podemos formar los siguientes "grupos":

{abc} {acb} {bac} {bca} {cab} {cba}

Si contamos los "grupos anteriores" vemos que hay 6. En efecto 6= $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. En conclusión con P_n podemos encontrar **el número de "grupos"** que pueden generarse, por lo tanto nos dice **cuántos grupos hay, no cuáles son esos grupos**.

Variaciones

• **Las Variaciones de n elementos tomados de k en k** se denotan como A_n^k y tienen la siguiente fórmula de cálculo:

$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-k+1)$

• Ejemplo:
$A_{10}^4 = 10 \cdot 9...(10-4+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

• Qué significa A_n^k:

Ejemplo 1: Por ejemplo si tenemos 30 estudiantes y queremos agruparlos de 2 en 2 en pupitres (el orden importa,por ejemplo, si se toma una foto de la clase), el número de estos agrupamientos está dado por A_{30}^2, a saber según la fórmula anterior podemos calcular $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$ es decir pueden "ordenarse" de 870 maneras.

Ejemplo 2: Si tenemos n=3 elementos por ejemplo el conjunto $\{a, b, c\}$ y queremos "ordenar" estos elementos en grupos de 2, obtenemos:

{ab} {ac} {bc} {ba} {cb} {ca} Observamos que hay 6 agrupamientos, es decir $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Se observa que aparece tanto el agrupamiento $\{ab\}$ como el agrupamiento $\{ba\}$, es decir **el orden de los elementos importa.**

Prácticamente A_n^k es similar a P_n con la diferencia de que en el "grupo" no entran todos los n elementos sino solo k (donde k $\leq$ n).

• Dominio de definición:

Para A_n^k necesitamos n, k $\in$ N y n $\geq$ k

Puede imaginarse la absurdidad de situaciones para n $<$ k o para n, k no naturales (por ejemplo negativos, fraccionarios, etc.)

Combinaciones

• **Las Combinaciones de n elementos tomados de k en k** se denotan como C_n^k y tienen la siguiente fórmula de cálculo:

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$

• **Prácticamente** se usa la fórmula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Ejemplo:
$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$

• Qué significa C_n^k:

Ejemplo: Si tenemos n=3 elementos por ejemplo el conjunto $\{a, b, c\}$ y queremos "combinar" estos elementos en grupos de 2, obtenemos:

{ab} {ac} {bc} Observamos que hay 3 agrupamientos, es decir $C_3^2 = 3$. Se observa que aparece el agrupamiento $\{ab\}$ **pero no el agrupamiento** $\{ba\}$, es decir **el orden de los elementos no importa.**

Prácticamente C_n^k es similar a A_n^k con la diferencia de que en el "grupo" el orden de los elementos no importa, es decir {a,b } se considera idéntico a {b,a }, por lo tanto se "cuenta" solo una vez. También se observa de la fórmula de definición que $C_n^k \leq A_n^k$

• Dominio de definición:

Para C_n^k necesitamos n, k $\in$ N y n $\geq$ k, como en el caso de las variaciones.

FICHA 15: Binomio de Newton

1. Fórmula del Binomio de Newton

Se observa que las siguientes fórmulas tienen estructura similar:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, etc.

En general para $(a+b)^n$ se observa lo siguiente:

Hay n+1 términos, siendo el primero a^n y el último b^n. Más precisamente el primero es $a^n b^0$ y el último $a^0 \cdot b^n$, en general tenemos términos de la forma $a^{n-k}b^k$, donde k toma valores de 0 a n. Estos términos están multiplicados cada uno por un coeficiente. Estos coeficientes tienen la fórmula C_n^k.

La expresión $(a+b)^n$ al estar formada por dos términos, se llama binomio. En honor al nombre de la persona que descubrió la siguiente fórmula, esta se llama **binomio de Newton**:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot b^n$$

Se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Hay n+1 términos, porque k toma valores entre 0 y n.

- El primer término es en realidad igual a a^n, porque C_n^0=1 y b^0=1.

- El último término es en realidad igual a b^n, porque C_n^n=1 y a^0=1.

- Los coeficientes C_n^0, C_n^1, $\cdots$ C_n^n se llaman **coeficientes binomiales**.

- **Los coeficientes binomiales equidistantes son iguales**, porque puede demostrarse fácilmente que $C_n^k = C_n^{n-k}$.

- El binomio de Newton puede escribirse de forma concisa de la siguiente manera:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

por lo tanto como una suma que tiene el término general

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Se observa que el primer término T_1 tiene k=0, el segundo término T_2 tiene k=1, etc. por lo tanto efectivamente la notación de T_{k+1} para un valor k está justificada.

- Si el binomio es una diferencia en lugar de una suma:

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot (-b)^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot (-b)^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

es decir hay una alternancia de signos comenzando con + luego - y así sucesivamente.

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 - C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

- Ahora podemos escribir la fórmula del binomio de Newton de la manera más general:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

por lo tanto para $(a-b)^n$ el término general es

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

---

2. Fórmulas Útiles

• La mayoría de los problemas con el binomio de Newton se resuelven **partiendo de la fórmula**

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

para $(a+b)^n$

• Los siguientes dos binomios se desarrollan con el binomio de Newton:

$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots C_n^n \qquad (1)$

$(1-1)^n = 0 \ = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n \qquad (2)$

Sumando la relación (1) a la relación (2) obtenemos: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = 2^{n-1}$

Restando las relaciones (1) - (2) obtenemos: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$

En conclusión **la suma de los coeficientes binomiales de índice par es igual a la suma de los de índice impar e igual a** 2^{n-1}:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$$

• Para problemas en que se requiere determinar el rango del término mayor en el desarrollo, partimos del cociente $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ que se compara con 1. Es decir partimos de $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} > 1$ y de esta relación resolvemos para k. Luego interpretamos k y encontramos el término máximo. Para un binomio $(a+b)^n$, el cociente

$$\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{a}{b}$$

Al ser la fórmula difícil de recordar, se recomienda demostrarla ad-hoc, partiendo del cociente $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ y expresando los términos T_{k+1} y T_{k+2} con la fórmula habitual $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ para $(a+b)^n$

Ejemplos: Encontrar el rango del término mayor en el desarrollo:

$$a)\ (1+0.1)^{100} \qquad b)\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100} \qquad c)\ (\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^{100}$$

FICHA 16: Polinomios

1. División de Polinomios

• **Método 1** El método clásico de dividir dos polinomios f(x) y g(x), según el método estudiado en el 8.° grado. Tiene la ventaja de que el divisor g(x) puede ser de cualquier grado. Se recomienda realizar la verificación según la fórmula:

$$\textbf{Dividendo} = \textbf{Divisor} \times \textbf{Cociente} + \textbf{Resto}$$

• **Método 2** Usando el esquema de Horner para dividir dos polinomios f(x) y g(x), donde g(x) es de la forma (x-a). Tiene la desventaja de que g(x) debe ser de grado I. Si g(x) es de grado mayor, descomponemos g(x) en factores de grado I, por ejemplo x^2-25 =(x-5)(x-(-5)) y dividimos sucesivamente f por (x-5) y luego el cociente obtenido se divide por x-(-5). El esquema de Horner tiene la ventaja de que se presta al procesamiento informático.

2. Divisibilidad de Polinomios

Para determinar el *máximo común divisor* **(mcd)** de dos polinomios, se usa el **algoritmo de Euclides**, a saber:

Dividimos f(x) por g(x) y obtenemos un cociente y un resto. Luego dividimos el dividendo por el resto obtenido. Continuamos realizando divisiones del dividendo por el resto, hasta obtener resto=0. **El último resto no nulo es mcd(f,g).**

Nota 1 Si se requiere el *mínimo común múltiplo* **mcm(f,g)**, usamos la propiedad de que

$$\textbf{mcm(f,g)} \cdot \textbf{mcd(f,g)} = \textbf{f} \cdot \textbf{g}$$

Prácticamente, calculamos f ·g y luego calculamos mcd(f,g) con el algoritmo de Euclides. Luego encontramos mcm(f,g)=$\frac{\text{f·g}}{\text{mcd(f,g)}}$

Nota 2 Si se requiere verificar si f y g son **coprimos**, usamos la propiedad de que **dos polinomios son coprimos si su mcd=1.**

Prácticamente, calculamos mcd(f,g) con el algoritmo de Euclides y si obtenemos mcd(f,g)=1 extraemos la conclusión de que f y g son coprimos, de lo contrario extraemos la conclusión de que no son coprimos.

3. Raíces de Ecuaciones de Grado Superior. Raíces Múltiples.

• Un polinomio P_n de grado n, que tiene raíces $x_1, x_2, \cdots x_n$ puede escribirse de la forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

• Si un polinomio P(X) admite la raíz x=a, entonces P(a)=0 (Teorema de Bézout).

• Raíces múltiples. Una ecuación puede tener raíces múltiples (dobles, triples, etc.), en general de orden k de multiplicidad.

Por ejemplo x=α es una raíz doble si x_1=x_2=α. En este caso P(x) aparece de la forma:

$$P(x)_n = (x - \alpha)^2 \cdot (x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

Significa que P(x) es exactamente divisible por (x-α)^2, es decir se divide por ejemplo con el esquema de Horner por (x-α) y luego el cociente obtenido se

divide también exactamente por (x-α). Otro enfoque del problema es dividir P(x) por (x-a)^2, es decir por x^2-2ax+a^2 por el método clásico de división de polinomios e imponer la condición de que el resto sea cero.

Lo más efectivo para raíces múltiples, es usar la siguiente teoría:

Un polinomio P(x) tiene la raíz x=α como raíz múltiple de orden k de multiplicidad, si:

$$P(\alpha) = 0$$
$$P^{'}(\alpha) = 0$$
$$P^{''}(\alpha) = 0$$
$$\cdots$$
$$P^{k-1}(\alpha) = 0$$
$$P^{k}(\alpha) \neq 0$$

---

4. Relaciones de Vieta

Por ejemplo sea la ecuación de 3.° grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con raíces x$_1$,x$_2$,x$_3$.

Se pueden escribir las siguientes sumas, llamadas relaciones de Vieta:

$$\begin{cases} S_1 = & x_1 + x_2 + x_3 & = -\frac{b}{a} \\ S_2 = & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 & = +\frac{c}{a} \\ S_3 = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

De manera similar, las relaciones de Vieta pueden escribirse para cualquier grado n.

Si se conocen las raíces de una ecuación, por ejemplo y$_1$,y$_2$,y$_3$ $\cdots$ y$_n$, y deseamos encontrar la ecuación que tiene esas raíces, calculamos las sumas de Vieta S$_1$,S$_2$, $\cdots$ S$_n$, luego escribimos la expresión de la ecuación que tiene esas raíces:

$$1 \cdot Y^n - S_1 \cdot Y^{n-1} + S_2 \cdot Y^{n-2} \cdots S_n = 0$$

---

5. Soluciones Avanzadas de Ecuaciones de Grado Superior

Además de los métodos clásicos de resolución de ecuaciones de grado superior, también pueden emplearse métodos avanzados que usan derivadas, por ejemplo:

- Usando la **Sucesión de Rolle**.
- Usando la representación gráfica de las funciones que forman la ecuación.

FICHA 17: Ecuaciones de Grado Superior

Parte I

Tipo 1. Ecuaciones Bicuadráticas

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$

Idea: Denota $x^2 = y$ y obtén una ecuación de segundo grado que se resuelve, luego encuentra x_1, x_2, x_3, x_4.

Tipo 2. Ecuaciones Recíprocas de Grado Tres

Ejemplo: Resolver la ecuación $5x^3 + 31x^2 + 31x^1 + 5 = 0$

Teoría 1: Una **ecuación recíproca** es una ecuación que tiene coeficientes equidistantes que son iguales.

Teoría 2: Toda ecuación recíproca de grado impar admite la raíz x=-1.

Teoría 3: Un polinomio P_n de grado n, con raíces $x_1, x_2, \cdots x_n$ puede ser escrito en la forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Teoría 4: Si tenemos para una división Dividendo, Divisor, Cociente, Resto, la siguiente relación es correcta:

$$Dividendo = Cociente \cdot Divisor + Resto$$

Idea: Sea $P_3(x)$ la expresión igual a cero. Como admite la raíz x=-1, significa que $P_3(x)$ es divisible por x-(-1), es decir por x+1. Realizamos la división de $P_3(x)$ por (x+1) y obtenemos $Cociente_2(x)$ y resto=0. Por lo tanto $P_3(x) = (x+1) \cdot Cociente_2(x)$. Resolvemos $Cociente_2(x) = 0$ y encontramos las otras dos raíces.

Tipo 3. Ecuaciones Recíprocas de Grado Cuatro

Ejemplo: Resolver la ecuación $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x^1 + 2 = 0$

Idea: Divide la ecuación por x^2, luego denota $(x + \frac{1}{x}) = y$. Expresa todo en función de y. Resuelve la ecuación de segundo grado en y, luego encuentra x_1, x_2, x_3, x_4.

Tipo 4. Ecuaciones Recíprocas de Grado Cinco

Ejemplo: Resolver la ecuación $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x^1 + 20 = 0$

Idea: Al ser una ecuación recíproca de grado impar, tiene la raíz x=-1. Procedemos como en el caso de las ecuaciones recíprocas de grado tres y a partir de $P_5(x) = (x+1)Q_4(x)$, dividiendo $P_5(x)$ por (x+1) obtenemos $Q_4(x)$ como una ecuación recíproca de grado 4, que se resuelve como cualquier ecuación recíproca de grado cuatro.

Tipo 5. Ecuaciones que Admiten la Raíz $x = a + b \cdot i$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^1 + e = 0$ sabiendo que admite la raíz x=1+i.

Teoría: Si una ecuación admite la raíz x=a+bi, entonces también admite la raíz x=a-bi

Idea: Sea por ejemplo el polinomio $P_4(x)$ del que sabemos que admite la raíz $x_1 = a + bi$. Según la teoría, $x_2 = a - bi$. Esto significa que podemos escribir

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculamos $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ y eliminamos i, denotamos la forma obtenida por comodidad de escritura con R(x). Por lo tanto $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Encontramos $Q_2(x)$ dividiendo $P_4(x)$ por $R(x)$. Resolvemos $Q_2(x) = 0$ y encontramos de aquí x_3, x_4. Conocemos x_1 del enunciado como x=a+bi, y x_2 lo conocemos de la teoría como x=a-bi.

Ejemplo 2: Determina a y b, luego resuelve la ecuación

$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax^1 + b = 0$$

sabiendo que admite la raíz x=1+2i

Teoría: Si un polinomio P(X) admite la raíz x=a, entonces P(a)=0 (Teorema de Bézout).

Idea: Como P(x) admite las raíces x=a y x=b, según el Teorema de Bézout, podemos escribir que P(a)=0 y P(b)=0. Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos y encontramos a y b. Ahora conocemos la forma de P(x) y usamos la teoría según la cual si el polinomio admite la raíz x=1+2i, significa que también admite la raíz x=1-2i. Procedemos como en el caso del problema anterior y encontramos las demás raíces.

Tipo 6. Ecuaciones que Admiten la Raíz $x = a + \sqrt{b}$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x^1 + 2 = 0$ sabiendo que admite la raíz $x = 1 - \sqrt{2}$.

Teoría: Si una ecuación admite la raíz $x = a + \sqrt{b}$, entonces también admite la raíz $x = a - \sqrt{b}$

Idea: Similar al problema anterior. Sea por ejemplo el polinomio $P_4(x)$ del que sabemos que admite la raíz $x_1 = a + \sqrt{b}$. Según la teoría, $x_2 = a - \sqrt{b}$. Esto significa que podemos escribir

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculamos $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ y eliminamos $\sqrt{b}$, denotamos la forma obtenida por comodidad de escritura con R(x). Por lo tanto $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Encontramos $Q_2(x)$ dividiendo $P_4(x)$ por $R(x)$. Resolvemos $Q_2(x) = 0$ y encontramos de aquí x_3, x_4. Conocemos x_1 del enunciado como $x = a + \sqrt{b}$, y x_2 lo conocemos de la teoría como $x = a - \sqrt{b}$.

FICHA 18: Ecuaciones de Grado Superior

Parte II

Tipo 7. Ecuaciones con Coeficiente de Mayor Grado =1

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$

Teoría: Las raíces enteras de la ecuación **podrían ser** entre los divisores del término independiente.

Idea: Extrae los divisores del término independiente, p.ej.: +1,-1,+2,-2,+4,-4 y verifica uno por uno si son raíces con el Teorema de Bézout. Es decir, verifica si P(+1)=0. Si es igual a cero, significa que es una raíz, de lo contrario no lo es. Realiza verificaciones para todos los divisores del término independiente. Si encontramos por ejemplo dos raíces, sean x_1 y x_2, escribimos $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)Q_2(x)$. Calculamos $(x-x_1)(x-x_2)$ y obtenemos una ecuación de segundo grado, la denotamos por comodidad de escritura con R(x). Dividimos P(x) por R(x) y obtenemos $Q_2(x)$. Resolvemos $Q_2(x) = 0$ y encontramos x_3 y x_4.

Tipo 8. Caso General = Ecuaciones con Coeficiente de Mayor Grado Diferente de 1

(Válido también para coeficiente de mayor grado igual a 1 como caso particular)

Ejemplo: Resolver la ecuación $6x^4 - 17x^3 - x^2 + 8x - 2 = 0$

Teoría: Las raíces de la ecuación **podrían ser** de la forma $\alpha = \frac{p}{q}$, p=divisor del término independiente, y q=divisor del coeficiente de mayor grado.

Idea: El método involucra muchos cálculos. Extrae los divisores del término independiente, p.ej.: p= +1,-1,+2,-2 y los divisores del coeficiente de mayor grado, p.ej.: q=+1,-1,+2,-2,+3,-3,+6,-6. Forma todas las combinaciones de tipo $\alpha = \frac{p}{q}$, a saber $\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2} \cdot \cdot$, etc. y verifica con el Teorema de Bézout si $P(\alpha)$=0. Si se encuentran dos soluciones, procede como en el caso del problema anterior.

Tipo 9. Ecuaciones Binomiales

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x^7 = 5$

Teoría: Lleva la ecuación a la forma $x^n = a$ y escribe el número a como número complejo, de la forma $r(cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))$. Usa si es necesario las formas $1 = cos(0) + i \cdot sin(0)$, respectivamente $-1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi)$. Obtenemos $x^n = r(cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))$ y aplicamos la fórmula del radical de un número complejo y obtenemos las raíces:

$$x_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}), k = 0, 1 \cdots n-1$$

Por ejemplo para $3x^7 = 5$ escribimos $x^7 = \frac{5}{3} \cdot 1$, es decir $x^7 = \frac{5}{3} \cdot (cos(0) + i \cdot sin(0))$ por lo tanto

$$x_k = \sqrt[7]{\frac{5}{3}}(cos\frac{0 + 2k\pi}{7} + i \cdot sin\frac{0 + 2k\pi}{7}), k = 0, 1 \cdots 6$$

Tipo 10. Otros Métodos para Resolver Ecuaciones de Grado Superior

- Usando el Teorema de Bézout, para raíces múltiples (material de 10.° grado)

- Usando las Relaciones de Vieta (material de 10.° grado)
- Usando la sucesión de Rolle (material de 11.° grado, involucra derivadas)
- Solución gráfica (material de 11.° grado, a veces involucra derivadas)

FICHA 19: Determinantes

1. Cálculo de Determinantes

a) Determinantes de orden 1:

$$\left| a \right| = a$$

b) Determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

c) Determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + b \cdot f \cdot g - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - f \cdot h \cdot a$$

Este método se llama *regla del triángulo*

d) Determinantes de orden >= 4:

No existe una regla como las anteriores, pero se procede de la siguiente manera:

Sea por ejemplo el siguiente determinante de orden 4:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Se **desarrolla** el determinante a lo largo de una fila o a lo largo de una columna. Hay que tener en cuenta que se puede elegir cualquier fila, respectivamente cualquier columna, el resultado obtenido es el mismo. Es decir, si se desarrolla a lo largo de la fila 1 es correcto, o si se hace a lo largo de la fila 2 también es correcto, si se desarrolla a lo largo de la columna 1 es correcto, a lo largo de la columna 2 también es correcto, etc.

Elegimos por ejemplo desarrollar a lo largo de la fila 1. El desarrollo del determinante a lo largo de la fila 1 es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Se observa que partiendo de un determinante de orden cuatro, llegamos a determinantes de orden tres, que podemos calcular.

Prácticamente hemos logrado reducir el grado del determinante en una unidad.

En general, para calcular un determinante de orden n, por este método llegamos a determinantes de orden *n-1*, luego aplicando el método de nuevo, los determinantes de orden *n-1* se reducen a determinantes de orden *n-2*, etc. hasta llegar a determinantes de orden 3, para los cuales tenemos un método de cálculo efectivo.

Este determinante "reducido", por ejemplo $\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$ para el elemento ubicado en la intersección de la fila 1 con la columna 1, se llama **menor** y se denota por Γ_{11}. En general en la intersección de la fila i con la columna j, encontramos el elemento a_{ij}, que tiene el menor Γ_{ij}.

El desarrollo de un determinante puede expresarse brevemente de la siguiente manera:

$$d = \sum (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$$

2. Propiedades de los Determinantes

Se observa que un determinante es más fácil de calcular si la fila (o columna) a lo largo de la cual se elige el desarrollo tiene tantos elementos iguales a cero como sea posible.

Por esta razón, es preferible que para el cálculo de un determinante elijamos una fila (o columna), hagamos tantos ceros como sea posible en esa fila (o columna) y solo entonces desarrollemos el determinante.

Para hacer ceros en una fila (o columna) se pueden usar las siguientes propiedades:

a) Si se suma una fila a otra fila en un determinante, el valor del determinante es el mismo.

Si denotamos por ejemplo la fila i con L_i y la fila j con L_j, significa que la operación $L_i = L_i + L_j$ es correcta

b) Si se resta una fila de otra fila en un determinante, el valor del determinante es el mismo, es decir la operación $L_i = L_i - L_j$ es correcta

c) Si en un determinante una fila se multiplica por cualquier número real, por ejemplo α y luego el valor obtenido se suma a otra fila, el valor del determinante es el mismo, es decir la operación $L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$ es correcta.

Se observa que para $\alpha = +1$ se obtiene el caso **a)** y para $\alpha = -1$ se obtiene el caso **b)**.

Hay que tener en cuenta que α puede ser cualquier número real, por ejemplo $\alpha = \frac{1}{3}$ es correcto.

En conclusión, recuerda que las siguientes relaciones son correctas:

$$a)\ \ L_i = L_i + L_j \qquad b)\ \ L_i = L_i - L_j \qquad c)\ \ L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$$

De manera análoga para columnas, es decir, denotando la columna con C, las siguientes operaciones son correctas:

$$a)\ \ C_i = C_i + C_j \qquad b)\ \ C_i = C_i - C_j \qquad c)\ \ C_i = C_i + \alpha \cdot C_j$$

3. De lo anterior resultan las siguientes consecuencias:

1) Un determinante tiene valor cero si tiene en una fila (o en una columna) todos los elementos iguales a cero.

2) Un determinante tiene valor cero si tiene dos filas idénticas (o dos columnas idénticas).

3) Un determinante tiene valor cero si tiene dos filas proporcionales (o dos columnas proporcionales).

4) Se puede extraer un factor común de una fila (o columna) de un determinante, es decir, por ejemplo, la siguiente operación es correcta:

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

respectivamente la siguiente operación:

$$\begin{vmatrix} a & \alpha \cdot b \\ c & \alpha \cdot d \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

FICHA 20: Matrices

1. La Noción de Matriz

Definición: Una matriz representa una tabla de elementos.

Sea por ejemplo la matriz X=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ que tiene 2 filas y tres columnas, por lo que podemos decir que X pertenece al conjunto de matrices con 2 filas y 3 columnas, es decir X $\in \mathcal{M}_{2,3}$ Hay que mencionar que el primer índice representa el número de filas y el segundo índice representa el número de columnas. En general, el conjunto de matrices con m filas y n columnas se denota por $\mathcal{M}_{m,n}$

- Si m=n, es decir el número de filas es igual al número de columnas, la matriz se llama *matriz cuadrada*, y el conjunto de matrices no se escribe $\mathcal{M}_{m,m}$ sino más simplemente, $\mathcal{M}_m$. Si m es diferente de n, la matriz también se llama matriz rectangular.

- Si m=1, es decir la matriz tiene una sola fila, la matriz se llama *matriz fila* y puede escribirse por ejemplo X $\in \mathcal{M}_{1,n}$.

- Si n=1, es decir la matriz tiene una sola columna, la matriz se llama *matriz columna* y puede escribirse por ejemplo X $\in \mathcal{M}_{m,1}$.

- Se observa que la matriz fila y la matriz columna representan en realidad vectores.

2. Operaciones con Matrices

Sean las matrices:
A=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y B=$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$

- **Suma de Matrices:** A+B=$\begin{vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{vmatrix}$
- **Resta de Matrices:** A - B=$\begin{vmatrix} a-A & b-B \\ c-C & d-D \end{vmatrix}$
- **Multiplicación de Matriz por Escalar:** $\alpha\cdot$ A=$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b \\ \alpha\cdot c & \alpha\cdot d \end{vmatrix}$, para α escalar.
- **Multiplicación de Dos Matrices:**

Sean las matrices: A=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ y B=$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$

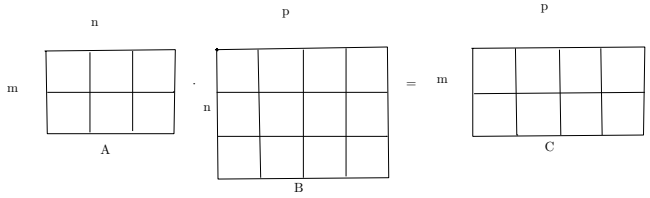
$$\text{A}\cdot\text{B}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} aA+bD+cG & aB+bE+cH & aC+bF+cI \\ dA+eD+fG & dB+eE+fH & dC+eF+fI \end{vmatrix}$$

Se puede recordar más fácilmente mirándolo de esta manera: A·B=
$\begin{vmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \end{vmatrix}$, donde L_i=fila i, y C_j=columna j

Analizando el algoritmo de multiplicación de dos matrices, se observa que si una matriz con *m filas* y *n columnas* se multiplica por otra matriz con *n filas* y *p columnas*, la matriz resultante tendrá *m filas* y *p columnas*. Para que se pueda realizar la multiplicación, es necesario que el número de filas de la segunda matriz sea igual al número de columnas de la primera matriz.

Por ejemplo para la multiplicación A · B = C (donde A tiene m filas y n columnas, y B tiene n filas y p columnas) se respetan las siguientes reglas presentadas en el siguiente diagrama:



Se observa que la multiplicación de matrices NO ES CONMUTATIVA

• **División de Dos Matrices:**

No existe la división de dos matrices. Para "simular la división matricial" se usa la noción de *matriz inversa*, denotada por A^{-1} (para la matriz inicial A), que se presentará más adelante.

---

3. Matrices Especiales

Sea por ejemplo matrices de 3 filas y 3 columnas, es decir matrices de $\mathcal{M}_3$

a) matriz cero. Para $\mathcal{M}_3$:

$$O_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En general, la matriz cero para $\mathcal{M}_n$, se denota por O_n y es una matriz cuadrada, con n filas y n columnas, con todos los elementos iguales a cero.

La matriz cero tiene la propiedad de ser neutra respecto a la suma matricial, es decir $A+O_n = O_n+A=A$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_n$.

b) matriz identidad. Para $\mathcal{M}_3$:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En general, la matriz identidad para $\mathcal{M}_n$, se denota por I_n y es una matriz cuadrada, con n filas y n columnas, con todos los elementos iguales a cero excepto los elementos en la diagonal principal que tienen todos valor 1.

La matriz identidad tiene la propiedad de ser neutra respecto a la multiplicación matricial, es decir $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_n$.

FICHA 21: Matriz Inversa. Rango de una Matriz

1. Matriz Inversa

Sea por ejemplo la matriz cuadrada de orden 3, $\mathrm{A}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Para determinar la matriz inversa, denotada por A^{-1}, procedemos de la siguiente manera:

1. Calcular el determinante de la matriz A.

a) Si det(A)=0, significa que la matriz inversa A^{-1} no existe, o en otras palabras, la matriz A no es invertible. En esta situación, el proceso se detiene aquí.

b) Si det(A) diferente de cero, significa que la matriz inversa A^{-1} existe, o en otras palabras, la matriz A es invertible. Continuar con el siguiente paso.

2. Formar la matriz transpuesta, denotada por A^t, a saber: la fila 1 de A se convierte en la columna 1 de A^t, la fila 2 de A se convierte en la columna 2 de A^t, etc. Así obtenemos:

$$A^t = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

3. Formar la matriz adjunta (o recíproca), denotada por A^*, **a partir de** $\mathbf{A^t}$, que tendrá tantos elementos como A^t, y tendrá la siguiente forma:

$$A^* = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

donde $\mathrm{x}_{11}=(-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (e \cdot i - h \cdot f) = ei - hf =$ número.

$\mathrm{x}_{12}=(-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} = -1 \cdot (b \cdot i - h \cdot c) = -bi + hc =$ número, etc.

Advertencia: No confundir con el método de desarrollo de un determinante, donde se usaba el factor genérico $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$ y aquí a_{ij} no se usa

4. Formar A^{-1} con la fórmula:

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{A^*}{det(A)} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_{11}}{det(A)} & \frac{x_{12}}{det(A)} & \frac{x_{13}}{det(A)} \\ \frac{x_{21}}{det(A)} & \frac{x_{22}}{det(A)} & \frac{x_{23}}{det(A)} \\ \frac{x_{31}}{det(A)} & \frac{x_{32}}{det(A)} & \frac{x_{33}}{det(A)} \end{vmatrix}$$

Se observa la razón por la que en el punto 1 se concluyó que A^{-1} no existe si se obtuvo det(A)=0.

5. Paso opcional, pero recomendado si hay tiempo, a saber la verificación de A^{-1}. Realizar la multiplicación $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ y verificar si efectivamente se obtiene la matriz identidad, en el caso del ejemplo presentado $\mathrm{I}_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Para el caso general, si se obtiene I_n para una matriz cuadrada de orden n, significa que A^{-1} fue calculada correctamente, de lo contrario significa que hubo un error y el cálculo debe ser verificado.

Notas

1. Se observa que si se requiere verificar si una matriz es invertible (o en otras palabras si existe una matriz inversa), el problema se reduce a verificar el determinante de la matriz. Si el determinante de la matriz es diferente de cero significa que la matriz es invertible y si el determinante de la matriz es igual a cero significa que la matriz no es invertible.

2. Los problemas que usan la matriz inversa son generalmente de los siguientes tipos:

- Se da una matriz y se requiere determinar la matriz inversa.
- Se da una matriz y se requiere verificar si la matriz es invertible.
- Resolver ecuaciones matriciales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método matricial.

---

2. Rango de una Matriz

Sea por ejemplo la siguiente matriz rectangular:

$$X = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$$

Por definición, el rango de una matriz representa el orden del mayor determinante cuadrado, diferente de cero, extraído de la matriz.

En nuestro caso, siendo la matriz de tipo 3x4, el orden máximo del que podemos *esperar* es 3x3. Extraemos de la matriz un determinante de orden 3x3, lo calculamos y verificamos si es diferente de cero. Si es diferente de cero, entonces el rango de la matriz es 3 y nos detenemos. Si el determinante es igual a cero, elegimos otro determinante de orden 3x3 y procedemos de manera similar.

Si todos los determinantes de orden 3x3 son iguales a cero, *bajamos nuestras expectativas* e intentamos con determinantes de orden 2x2 de manera similar.

Si todos los determinantes de orden 2x2 son iguales a cero, *bajamos nuestras expectativas* e intentamos con determinantes de orden 1x1.

Se observa que en *el peor caso* encontraremos *al menos* un determinante diferente de cero de orden 1, excepto en la situación donde la matriz tiene todos los elementos iguales a cero, lo que significaría que el rango es igual a cero. De lo anterior se puede inferir que el algoritmo es finito.

Notas

1. Se observa que el método presentado parte de un enfoque *de arriba hacia abajo* sobre la matriz, en el sentido de que comienza con los determinantes cuadrados extraídos de la matriz, de rango máximo.

2. Hay que tener cuidado de considerar todos los determinantes de una cierta dimensión, es decir *no omitir* ningún determinante.

3. Los problemas que usan el rango de una matriz son generalmente de los siguientes tipos:

- Se da una matriz y se requiere determinar su rango.
- Se da una matriz y se requiere discutir el rango como función de un parámetro.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

FICHA 22: Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Sistemas de Ecuaciones Resueltos por el Método Matricial

Sea por ejemplo el sistema: $\begin{cases} x+y+z & =7 \\ 3x+7y+5z & =2 \\ 6x-3y+z & =1 \end{cases}$

La **solución matricial** del sistema se realiza siguiendo estos pasos:

- Formar la matriz de coeficientes del sistema, en nuestro caso A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Formar la matriz columna con las incógnitas del sistema, X= $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

- Formar la matriz columna con los términos independientes del sistema, B= $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- El sistema es equivalente a la siguiente ecuación matricial:

$$\mathrm{A}\cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

- Resolver la ecuación matricial anterior de la manera habitual, es decir calcular A^{-1}, multiplicar la ecuación matricial a la izquierda por A^{-1} y obtener $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot \mathrm{B}$. Obtenemos la matriz columna X, de la que extraemos x,y,z.

Nota Este método se usa raramente, posiblemente solo si se solicita explícitamente en el enunciado resolver por este método.

2. Regla de Cramer

Sea por ejemplo el sistema: $\begin{cases} x+y+z & =7 \\ 3x+7y+5z & =2 \\ 6x-3y+z & =1 \end{cases}$

Se realizan los siguientes pasos:

- Formar la matriz de coeficientes del sistema, en nuestro caso A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcular el determinante de la matriz A, denotarlo por ejemplo por Δ (delta).

• Si Δ =0, significa que el sistema no puede resolverse por la Regla de Cramer y el proceso se detiene aquí.

• Si $\Delta \neq 0$, significa que el sistema puede resolverse por la Regla de Cramer y continuamos con la siguiente etapa.

- Calcular Δ_x, reemplazando la columna con los coeficientes de x de la matriz del sistema, por la columna de términos independientes, es decir obtenemos: Δ_x= $\begin{bmatrix} \mathbf{7} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 7 & 5 \\ \mathbf{1} & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcular Δ_y y Δ_z de manera similar.

- Calcular x=$\frac{\Delta_x}{\Delta}$ y=$\frac{\Delta_y}{\Delta}$ z=$\frac{\Delta_z}{\Delta}$ siendo la solución del sistema (x,y,z).

Se observa la razón por la que un sistema con $\Delta = 0$ no puede resolverse por la Regla de Cramer, a saber porque Δ aparece en el denominador.

3. Estudio de la Compatibilidad del Sistema

Sea por ejemplo el sistema: $\begin{cases} 3x+y+2z &= 8 \\ 2x-3y+z &= 1 \\ 5x+9y+4z &= 22 \end{cases}$

Se realizan los siguientes pasos:

- Formar la matriz de coeficientes del sistema, en nuestro caso A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

- Calcular el determinante de la matriz A, denotarlo por ejemplo por Δ (delta).

• Si $\Delta \neq 0$, significa que el sistema es **compatible determinado**, puede resolverse por la Regla de Cramer y el presente método no es necesario. Resolver por la Regla de Cramer presentada anteriormente y el proceso se detiene aquí.

• Si Δ =0, significa que el sistema no puede resolverse por la Regla de Cramer y realizamos los siguientes pasos. En nuestro caso del cálculo obtenemos Δ =0.

- Extraer de la matriz del sistema **un determinante cuadrado del mayor orden, diferente de cero**, llamado **determinante principal**, que denotamos por ejemplo por δ (delta minúscula).

Por ejemplo $\delta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ = -9-2=-11 $\neq 0$

- Establecer las **ecuaciones principales**, en este caso la ecuación 1 y la ecuación 2, y las **ecuaciones secundarias**, en este caso la ecuación 3. Establecer las **incógnitas principales**, en este caso x e y, y las **incógnitas secundarias**, en este caso z.

- Formar el **determinante característico**, denotado por Δ_c, *bordeando el determinante principal δ con una fila formada por los coeficientes correspondientes de* **una de** las ecuaciones secundarias y con *una columna formada por los términos independientes correspondientes.* Para nuestro caso, obtenemos $\Delta_c = \begin{bmatrix} \mathit{3} & \mathit{1} & \mathbf{8} \\ \mathit{2} & \mathit{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{22} \end{bmatrix}$

- Calcular Δ_c, (en nuestro caso $\Delta_c = 0$) e interpretar de la siguiente manera:

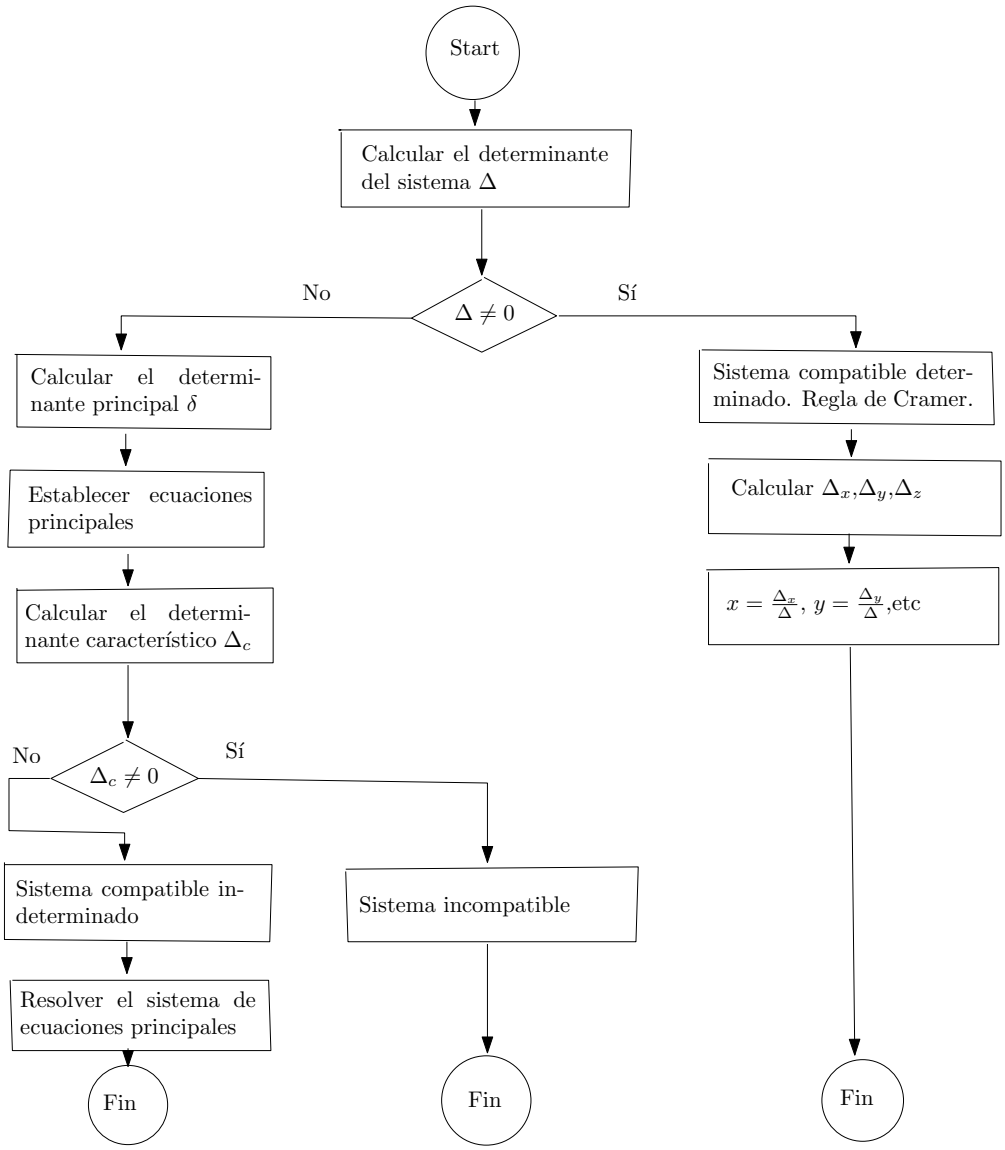
• Si $\Delta_c \neq 0$ concluimos que el sistema es **incompatible** y el proceso se detiene aquí.

• Si $\Delta_c = 0$ concluimos que el sistema es **compatible indeterminado** (en este caso, **sistema compatible simplemente indeterminado** porque tenemos una sola incógnita secundaria) y continuamos con el siguiente paso:

- Resolver **el sistema formado por las ecuaciones principales a saber extraer las incógnitas principales como funciones de las incógnitas secundarias**. Prácticamente escribir el sistema formado por las ecuaciones secundarias, trasladar las incógnitas secundarias al miembro con los términos independientes y extraer las incógnitas principales como funciones de las incógnitas secundarias. En nuestro caso, resolver el sistema $\begin{cases} 3x+y &= 8-2z \\ 2x-3y &= 1-z \end{cases}$ por los métodos habituales (método de reducción o sustitución o incluso Cramer) y extraer x=f(z) e y=f(z), z $\in$ R. Específicamente obtenemos x=$\frac{25-7z}{11}$, y=$\frac{13-z}{11}$, z $\in$ R.

FICHA 23: Compatibilidad de Sistemas de Ecuaciones = Gráficamente

Representación gráfica de las etapas para analizar la compatibilidad de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas:



Se recomienda analizar los sistemas siguiendo este modelo, con la posible adaptación requerida por las especificidades del problema.

Nota:

La representación gráfica presentada anteriormente utiliza las reglas para representar **diagramas de flujo lógicos**, frecuentemente usados en informática.

Brevemente, las principales convenciones para representar diagramas de flujo lógicos:

El rombo representa una estructura de decisión, con dos salidas, una para condición verdadera y otra para condición falsa.
El rectángulo enmarca una acción.
El círculo se usa para enmarcar el inicio *(Inicio)* del algoritmo, respectivamente el fin *(Fin)*.

Esta representación gráfica es muy sugestiva para las personas familiarizadas con la lectura de un diagrama de flujo lógico.

Las personas que no están acostumbradas a este modo de representación - en caso de encontrar dificultades - pueden ignorar este gráfico y estudiar *la Ficha 22 y la Ficha 24*, el resultado al que llegarán al final siendo el mismo.

FICHA 24: Sistemas Particulares de Ecuaciones

1. Discusión de la Naturaleza de un Sistema según Parámetros Reales

Seguir las etapas presentadas en el gráfico de estudio de compatibilidad y tratar por casos, según los valores de los parámetros. Por ejemplo si tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, con un parámetro m. Calculamos el determinante del sistema y obtenemos por ejemplo $\Delta = (m-5)\cdot(m+7)$. Procedemos de la siguiente manera:

Caso 1 Para $(m-5)\cdot(m+7) \neq 0$, es decir para m$\neq$ 5 y m$\neq$ -7 el sistema es compatible determinado y se aplica la Regla de Cramer. **Extraer efectivamente como funciones de m** Δ luego $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ etc. luego x,y,z.

Caso 2 Para m=5 **sustituir efectivamente m=5** en el sistema inicial, obtener un sistema sin parámetros, que se resuelve absolutamente normalmente como cualquier sistema ordinario sin parámetros. Por supuesto se obtendrá $\Delta = 0$ y se seguirá el camino correspondiente.

Caso 3 Para m=-7 **sustituir efectivamente m=-7** en el sistema inicial, obtener un sistema sin parámetros, que se resuelve absolutamente normalmente como cualquier sistema ordinario sin parámetros. Por supuesto se obtendrá $\Delta = 0$ y se seguirá el camino correspondiente.

Si Δ_c se obtiene como función del parámetro, (por ejemplo $\Delta_c = m-9$) separaremos de nuevo por casos, es decir:

Caso a) Para $m-9 \neq 0$ es decir $m \neq 9$, el sistema es incompatible y se detiene.

Caso b) Para $m-9=0$ es decir $m=9$, el sistema es compatible e indeterminado y continuamos según el gráfico de compatibilidad, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones principales.

Ejemplo Discutir la naturaleza del sistema según los valores del parámetro m y resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - my + z & = 1 \\ x - y + z & = 1 \\ mx + m^2y - z & = m^2 \end{cases}$$

2. Sistemas Homogéneos

Un sistema homogéneo es por definición un sistema que tiene todos los términos independientes iguales a cero.

Todas las propiedades y el método de trabajo conocido de los sistemas se conservan, la única novedad siendo que un sistema homogéneo admite siempre la solución x=y=z= $\cdots$ =0 llamada **solución trivial** o **solución nula**.

Analizando el gráfico de estudio de compatibilidad, se observa que si $\Delta \neq 0$ resulta que el sistema es compatible determinado, es decir admite una solución **única**. Como el sistema homogéneo siempre admite la solución trivial, significa que para $\Delta \neq 0$, la solución trivial es la **única solución**. Por lo tanto si para un sistema homogéneo se requiere imponer la condición de que el sistema **no contenga solo la solución trivial**, debe imponerse la condición $\Delta = 0$.

Ejemplo Resolver el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x+2y+z+t &= 0 \\ 2x+y+z+2t &= 0 \\ x+2y+2z+t &= 0 \\ x+y+z+t &= 0 \end{cases}$$

---

3. Sistemas con Número de Ecuaciones Diferente al Número de Incógnitas

Puede aparecer una de las dos situaciones siguientes:

a) El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas.
Ejemplo Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z+t &= 1 \\ x-2y+z-t &= -1 \\ x-2y+z+5t &= 6 \end{cases}$$

b) El número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas.
Ejemplo Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 6x-8y &= 1 \\ 5x+2y &= 3 \end{cases}$$

Se recomienda como ejercicio analizar el gráfico de estudio de compatibilidad para cada una de estas situaciones.

Como recomendaciones generales:

• Para el caso a) el sistema aunque sea compatible no puede ser también determinado, porque estamos en la situación donde tenemos menos ecuaciones que incógnitas.

• Para el caso b) tenemos más ecuaciones que incógnitas, por lo que el sistema podría ser determinado, pero las soluciones obtenidas deben verificarse para todas las ecuaciones para asegurarse de que el sistema es compatible.

Teoría

Los siguientes se consideran evidentes:

a) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. En general, $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ para k > 0.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. En general $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ para k > 0.

c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$. En general, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ para a = subunitario.

Tipos de Límites de Sucesiones

Tipo 1 = Fracciones Simples

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^3+2n^2+3n+3}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^6+2n^2+3n+3}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^4+2n^2+3n+3}$

Idea: Factorizar, tanto en el denominador como en el numerador, **n** a la potencia más alta.

Tipo 2 = Sumas Conocidas

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots n}{3n^2+2n+1}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3n^2+2n+1}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots n\cdot(n+1)}{4n^5+5}$

Idea: Reducir la suma según las reglas conocidas, tras lo cual el problema usualmente se convierte de tipo 1.

Tipo 3 = Radicales

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+5})$ b) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 3n)$ c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+2})$

Idea: Multiplicar la agrupación $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ por $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ para eliminar el radical del numerador, donde se obtendrá a-b, el problema usualmente convirtiéndose de tipo 1. De manera similar, para la agrupación $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, multiplicar por $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

Tipo 4 = Potencias

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot5^n+6\cdot3^n}{5^n+3\cdot2^n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot7^{n+3}+6\cdot3^{n+1}}{7^{n+2}+4\cdot3^{n+4}}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot5^n+6\cdot6^n}{7^n+3\cdot8^n}$

Idea: Factorizar, tanto en el denominador como en el numerador, la potencia a^n a la potencia más alta, por ejemplo para a), en el numerador factorizar 5^n y en el denominador también 5^n.

Tipo 5 = Agrupación tipo $(1+\frac{1}{n})^n$. Indeterminación 1^∞

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n-2})^{n+1}$ b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-5})^{n+2}$ c) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2-n})^{2n+1}$

Idea: Intentar llegar a la fórmula $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, respectivamente para el caso general, $\lim_{n\to\infty}(1+A)^{\frac{1}{A}} = e$, donde A $\to$0 para n$\to\infty$.

Tipo 6 = Teorema del Sandwich

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot sin(n+7)$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

Idea: Usar el **Teorema del Sandwich**:

Sea una sucesión a_n y un límite l. Si $b_n <= a_n <= c_n$ y tanto la sucesión $b_n \to l$ como $c_n \to l$, entonces $a_n \to l$. Si l=0, la regla también se llama **criterio de mayoración**.

Teoría

Los siguientes se consideran conocidos:

a) Método de cálculo de límites de sucesiones

b) Descomposición $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ y de manera similar para cualquier polinomio de grado n.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

Los límites de funciones pueden calcularse por dos métodos principales: el clásico, es decir sin usar derivadas, y usando la Regla de l'Hôpital que implica el uso de derivadas. Algunos problemas se resuelven más fácilmente por un método, otros problemas por el otro. No existe una receta para indicar cuál es el método más adecuado para un determinado problema.

A) Tipos de Límites Clásicos de Funciones

(sin usar derivadas)

Tipo 1 = Límites con $x \to \pm\infty$

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+4x^2+2x+1}{3x^2+2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+3}{x-5})^{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x+1}$

Idea: Trabajar de manera similar a los límites de sucesiones, donde teníamos $n \to \pm\infty$.

Tipo 2 = Límites con $x \to x_0$ donde $x - x_0$ aparece en el denominador

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{-3(x^2+2)}{x-7}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{5+\frac{-6}{x-3}}$

Idea: Construir una tabla y finalmente obtener el límite a la izquierda de x_0 y el límite a la derecha de x_0.

Tipo 3 = Límites de Fracciones de Polinomios

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$

Idea: Intentar descomponer tanto el numerador como el denominador según la fórmula de la forma $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ (correspondiente al grado del polinomio), o posiblemente según otras fórmulas, tras lo cual intentar simplificar el factor $x - x_0$.

Tipo 4 = Límites de Funciones Trigonométricas

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(7x)}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(3x)}{tg(7x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{sin(x-3)}{4(x-3)}$

Idea: Usar la fórmula $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ y las fórmulas habituales de trigonometría. Tener en cuenta que sin(0)=0 y cos(0)=1.

Los métodos presentados anteriormente pertenecen a la categoría de **cálculo de límites de funciones por el método clásico** en el sentido de que **no** usan derivadas. Los límites de funciones también pueden calcularse usando derivadas, mediante la Regla de l'Hôpital, presentada a continuación.

B) Teorema de l'Hôpital

Límites de funciones usando derivadas

El cálculo de límites de funciones puede **a veces** simplificarse usando el Teorema de l'Hôpital.

Teorema de l'Hôpital: Para formas indeterminadas de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ la siguiente relación es verdadera:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Casos Particulares En el caso donde la forma indeterminada no es de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, la expresión dada debe transformarse en una de estas formas. Así procedemos si tenemos formas indeterminadas de tipo:

1. $[0 \cdot \infty]$
2. $[\infty - \infty]$
3. $[1^\infty, \infty^0, etc]$ en general formas indeterminadas de la forma f^g

A veces es más sencillo calcular un límite de función por l'Hôpital, otras veces es más sencillo por métodos clásicos (clásico significa sin derivadas, significa sin l'Hôpital). **No hay una receta** para recomendar para una expresión dada si es más fácil con un método u otro.

Para formas indeterminadas diferentes de $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, procedemos de la siguiente manera:

1. Para la forma indeterminada $[0 \cdot \infty]$

Calculamos $\lim_{x\to x_0} f \cdot g$, donde $f \to 0$ y $g \to \infty$.

Invertimos una de las funciones, por ejemplo:

$f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ y ahora podemos aplicar la Regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} f \cdot g = \lim_{x\to x_0} \frac{g}{\frac{1}{f}} \ [\frac{\infty}{\infty}] \ = \lim_{x\to x_0} \frac{g'}{(\frac{1}{f})'}$$

2. Para la forma indeterminada $[\infty - \infty]$

Calculamos $\lim_{x\to x_0} (f - g)$, donde $f \to \infty$ y $g \to \infty$.

Transformamos de la siguiente manera:

$f - g = f \cdot g \frac{(f-g)}{f \cdot g} = f \cdot g \cdot (\frac{f}{fg} - \frac{g}{fg}) = f \cdot g \cdot (\frac{1}{g} - \frac{1}{f}) = [\infty \cdot 0] = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} = [\frac{0}{0}]$

y ahora podemos aplicar la Regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} (f - g) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\frac{1}{g} - \frac{1}{f})'}{(\frac{1}{f \cdot g})'}$$

3. Para formas indeterminadas de tipo f^g. Por ejemplo 1^∞, ∞^0, etc.

Usamos la fórmula $A = e^{ln(A)}$, y tomamos A=f^g.

FICHA 27: Aplicaciones de Límites de Funciones

Continuidad, Derivadas, Diferenciabilidad, Asíntotas

1. Funciones Continuas

Toda función elemental es continua en un intervalo.
El estudio de continuidad se plantea en puntos, por ejemplo en el punto $x = x_0$. Se procede de la siguiente manera:

1. - Calcular el límite por la izquierda en x_0, $l_s|_{x=x_0} = lim_{x\to x_0(x<x_0)} f(x)$
2. - Calcular el límite por la derecha en x_0, $l_d|_{x=x_0} = lim_{x\to x_0(x>x_0)} f(x)$
3. - Calcular el valor de la función en el punto x_0, es decir $f(x_0)$
4. - Si el límite por la izquierda en x_0 es igual al límite por la derecha en x_0 y es igual a $f(x_0)$, entonces la función f(x) es continua en el punto x_0, de lo contrario f(x) no es continua en el punto x_0.

Brevemente, la condición de continuidad en un punto x_0 es que

$$l_s|_{x=x_0} = l_d|_{x=x_0} = f(x_0)$$

Como el estudio de continuidad se realiza en puntos, los problemas de continuidad aparecen en problemas donde f(x) se da en forma de *llaves*, el estudio se realiza en los puntos donde la función cambia su forma.

2. Definición de Derivada

La derivada de la función f(x) en el punto x_0 se denota por $f(x)'_{x=x_0}$ y se define de la siguiente manera:

$$f(x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Aplicando la fórmula anterior a funciones conocidas, se obtuvo la tabla de derivadas.

3. Funciones Diferenciables

Las funciones elementales son diferenciables en intervalos.
El estudio de diferenciabilidad se plantea en puntos, por ejemplo en el punto $x = x_0$. Se procede de la siguiente manera:

La función f(x) es diferenciable en el punto $x = x_0$, si la derivada por la izquierda en x_0 y la derivada por la derecha en x_0 son **iguales y finitas**.

a) Derivada por la izquierda en el punto x_0 se denota por $f's_{(x=x_0)}$ y se calcula con la fórmula de definición de derivada:

$$f(x)'_s(x = x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Puede calcularse con la Regla de l'Hôpital porque existe una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y obtenemos

$$f(x)'_s(x = x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f'(x)$$

b) Derivada por la derecha en el punto x_0 se denota por $f^{'}d_{(x=x_0)}$ y se calcula con la fórmula de definición de derivada:

$$f(x)_d^{'}(x=x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Puede calcularse con la Regla de l'Hôpital porque existe una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y obtenemos

$$f(x)_d^{'}(x=x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} f^{'}(x)$$

En conclusión, calcular la derivada por la izquierda en el punto x_0 y la derivada por la derecha en x_0. Si estas dos son **iguales y finitas**, entonces la función f(x) es diferenciable en el punto x_0, de lo contrario f(x) no es diferenciable en el punto x_0.

Como el estudio de diferenciabilidad se realiza en puntos, los problemas de diferenciabilidad aparecen en problemas donde f(x) se da en forma de *llaves*, el estudio se realiza en los puntos donde la función cambia su forma.

---

4. Asíntotas

Pueden existir tres tipos de asíntotas:
• **Asíntota Horizontal** Una línea *horizontal* y=a se llama asíntota horizontal en $+\infty$ si $lim_{x\to+\infty}$ f(x) = a

De manera similar, una línea *horizontal* y=b se llama asíntota horizontal en -∞ si $lim_{x\to-\infty}$ f(x) = b
Si $+\infty$ no forma parte del dominio de definición, entonces seguramente no tenemos una asíntota horizontal en $+\infty$. De manera similar para -∞.
• **Asíntota Vertical** Es una línea *vertical* x=c, si $lim_{x\to c}$ f(x) = +-∞
• **Asíntota Oblicua** Estudio en $+\infty$:

Si $+\infty$ no forma parte del dominio de definición, entonces seguramente no tenemos una asíntota oblicua en $+\infty$. Si $+\infty$ forma parte del dominio de definición pero ya hemos establecido que tenemos una asíntota horizontal en $+\infty$, entonces seguramente no tenemos una asíntota oblicua en $+\infty$, porque la función no puede tener simultáneamente dos asíntotas en $+\infty$. Si $+\infty$ pertenece al dominio de definición y $lim_{x\to+\infty}$ f(x) = +-∞ significa que en $+\infty$ no tenemos una asíntota horizontal. En este caso verificamos *si posiblemente existe* una asíntota oblicua en $+\infty$. Calculamos $m = lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ Si obtenemos *m finito*, continuamos con el cálculo de $n = lim_{x\to+\infty}(f(x)-m\cdot x)$ Si n también es finito, podemos concluir que existe una asíntota oblicua en $+\infty$, a saber la línea *oblicua* $y = m\cdot x + n$.

Estudiamos de manera similar la existencia de la asíntota oblicua en -∞.

Prácticamente procedemos de la siguiente manera:
1. Establecer el dominio de definición, escrito como unión de intervalos.
2. Calcular los valores de la función, respectivamente los límites de la función *en los extremos del dominio de definición.*
3. Establecer las asíntotas analizando los valores de la función, respectivamente los valores de los límites obtenidos y las definiciones de las asíntotas, presentadas anteriormente. Se observa que las asíntotas horizontales y oblicuas pueden aparecer en + ∞ o en - ∞, y las asíntotas verticales pueden aparecer en los extremos de los intervalos diferentes de +- ∞. Algunas funciones tienen asíntotas, otras no.

FICHA 28: Derivadas

1. Definición de Derivada

La derivada de la función f(x) en el punto x_0 se denota por $f(x)'_{x=x_0}$ y se define de la siguiente manera:

$$f(x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Tabla de Derivadas

Función	Derivada
k(=constante)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3. Operaciones con Derivadas

$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$

$(f-g)^{'} = f^{'} - g^{'}$

$(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$

$(k \cdot f)^{'} = k \cdot f^{'}$, donde k=constante

$(\frac{f}{g})^{'} = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$

• Avanzado $(f^g)^{'} = f^g \cdot (g^{'} \cdot ln(f) + g \cdot \frac{f^{'}}{f})$

• Diferenciación de funciones compuestas: $f(u(v(x)))^{'} = f^{'}(u(v(x))) \cdot u^{'}(v(x)) \cdot v^{'}(x)$

4. Funciones Diferenciables

La función f(x) es diferenciable en el punto $x = x_0$, si la derivada por la izquierda en x_0 y la derivada por la derecha en x_0 son **iguales y finitas**.

a) Derivada por la izquierda en el punto x_0 se denota por $f^{'}s_{(x=x_0)}$ y se calcula con la fórmula de definición de derivada:

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Puede calcularse con la Regla de l'Hôpital porque existe una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y obtenemos

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f^{'}(x)$$

b) Derivada por la derecha en el punto x_0 se denota por $f^{'}d_{(x=x_0)}$ y se calcula con la fórmula de definición de derivada:

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Puede calcularse con la Regla de l'Hôpital porque existe una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y obtenemos

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f^{'}(x)$$

En conclusión, calcular la derivada por la izquierda en el punto x_0 y la derivada por la derecha en x_0. Si estas dos son **iguales y finitas**, entonces la función f(x) es diferenciable en el punto x_0, de lo contrario f(x) no es diferenciable en el punto x_0.

5. Principales Aplicaciones de Derivadas

• Teorema de l'Hôpital

• Teorema de Lagrange

• Teorema de Rolle, Teorema de Cauchy

• Funciones cóncavas, convexas

• Representación gráfica de funciones

FICHA 29: Aplicaciones de Derivadas

Teoremas de l'Hôpital, Rolle, Lagrange, Cauchy
Monotonía, Concavidad/Convexidad, Gráficas de Funciones

---

1. Teorema de l'Hôpital

El cálculo de límites de funciones puede **a veces** simplificarse usando el Teorema de l'Hôpital.

Teorema de l'Hôpital: Para formas indeterminadas de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ la siguiente relación es verdadera:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Casos Particulares En el caso donde la forma indeterminada no es de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, la expresión dada debe transformarse en una de estas formas. Así procedemos si tenemos formas indeterminadas de tipo:

1. $[0 \cdot \infty]$
2. $[\infty - \infty]$
3. $[1^{\infty}, \infty^0, etc]$ en general formas indeterminadas de la forma f^g

A veces es más sencillo calcular un límite de función por l'Hôpital, otras veces es más sencillo por métodos clásicos (clásico significa sin derivadas, significa sin l'Hôpital). No hay una receta para recomendar para una expresión dada si es más fácil con un método u otro.

---

2. Teorema de Rolle

Sea f(x) una función, I un intervalo y dos números a,b, donde a < b y a,b ∈ I.

Si:

1. La función f(x) es continua para x ∈ [a,b]
2. La función f(x) es diferenciable para x ∈ (a,b)
3. f(a)=f(b)

entonces existe al menos un punto **c** entre a y b, tal que **f'(c)=0**.

---

3. Teorema de Lagrange

Sea f(x) una función, I un intervalo y dos números a,b, donde a < b y a,b ∈ I.

Si:

1. La función f(x) es continua para cualquier x ∈ [a,b]
2. La función f(x) es diferenciable para cualquier x ∈ (a,b)

entonces existe un punto **c** entre a y b, tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Consecuencias del Teorema de Lagrange:

1. Si f'(x) > 0 en un intervalo, entonces f(x) es **creciente** en ese intervalo
2. Si f'(x) < 0 en un intervalo, entonces f(x) es **decreciente** en ese intervalo
3. Si f'(x) $= 0$ en un intervalo, entonces f(x) es **constante** en ese intervalo

Notas:

a) Puntos extremos: Estudiando el signo de f'(x) podemos analizar la monotonía de la función f(x) (creciente/decreciente) y basándonos en la monotonía podemos establecer los puntos extremos de la función (mínimo respectivamente máximo).

b) Avanzado: Interpretación geométrica del Teorema de Lagrange.

---

4. Teorema de Cauchy

Sean f(x) y g(x) funciones, I un intervalo y dos números a,b, con a<b y a,b $\in$ I.

Si:

1. Las funciones f(x) y g(x) son continuas para x $\in$ [a,b]
2. Las funciones f(x) y g(x) son diferenciables para x $\in$ (a,b)
3. La función g'(x) $\neq 0$ para x $\in$ (a,b)

entonces existe un punto **c** entre a y b, tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Se observa que para el caso particular g(x)=x, obtenemos el Teorema de Lagrange.

---

5. Concavidad, Convexidad

Nuevas nociones:

- Función convexa, función cóncava.
- Punto de inflexión, punto de cambio.

Teoría:

1. Si f"(x) > 0, entonces f(x)= **convexa** en ese intervalo.
2. Si f"(x) < 0, entonces f(x)= **cóncava** en ese intervalo.

---

6. Representación Gráfica de Funciones

1. Determinación del dominio de definición, escrito como unión de intervalos
2. Cálculo de los valores de la función (límites de la función) en los extremos del dominio de definición
3. Determinación de las asíntotas
4. Intersección con el eje Ox (hacer y=0 y resolver para x)
5. Intersección con el eje Oy (hacer x=0 y resolver para y)
6. Primera derivada: f'=0, resolver ecuación, tabla, monotonía, puntos extremos
7. Segunda derivada: f"=0, resolver ecuación, tabla, concavidad/convexidad
8. Tabla general
9. Trazar la gráfica

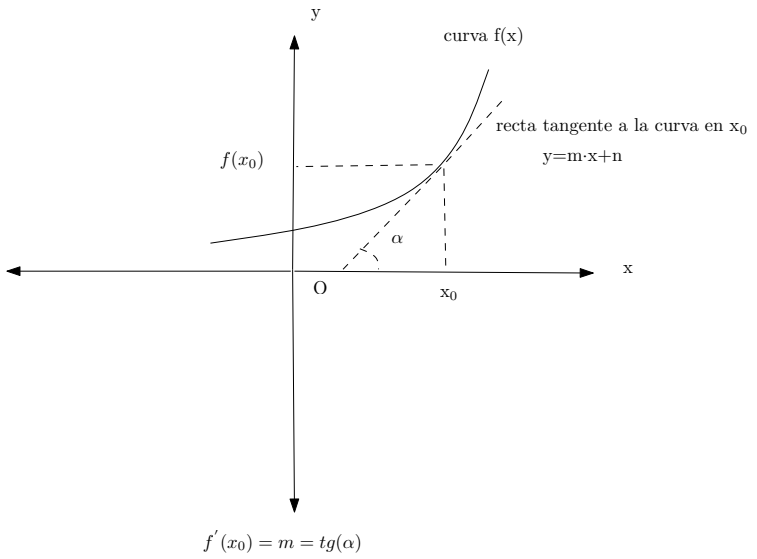
FICHA 30: Interpretación Geométrica de la Derivada

Interpretación Geométrica de la Derivada:

• Recordar que la derivada de una función f(x) en un punto x_0 es por definición:

$$f^{'}(x)_{x=x_0} = f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• La derivada de una función f(x) en el punto x_0, denotada por $f^{'}(x_0)$, significa **la pendiente de la línea tangente a la curva f(x) en el punto x_0,**, donde la pendiente de una línea representa la tangente del ángulo que forma esa línea con el eje Ox. Interpretación geométrica de la derivada representada gráficamente:



Útil para los Ejercicios

Se consideran conocidos los siguientes:

1. La ecuación de una línea que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m, es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

2. La pendiente **m** de una línea de la forma $y = m \cdot x + n$, representa la tangente del ángulo que forma la línea con el eje Ox, por lo tanto m=tg(α), donde α representa el ángulo que forma la línea con el eje Ox.

3. La condición para que dos líneas $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ y $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sean paralelas es que las líneas tengan pendientes iguales, es decir $m_1 = m_2$.

4. La condición para que dos líneas $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ y $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sean perpendiculares es que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Ejercicios

1. Escribe la ecuación de la tangente a la curva f(x)=ln(x)+x^2-1 en el punto (e,e^2).

2. Determina un punto en la curva y=$\frac{x-1}{x+1}$, x$\neq -1$, donde la tangente es paralela a la línea y=$\frac{x}{2}$.

3. Determina las constantes α y β, de modo que las curvas con ecuaciones:

$$y_1 = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2 \quad y \quad y_2 = \frac{x-a}{x}, x \neq 0$$

sean tangentes en el punto x=1, donde $a \in R$ es un valor conocido.

4. Escribe la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ en los puntos de intersección de esta con la línea x-y+1=0.

1. La Noción de Integral

La integral de la función f(x) se denota por $\int f(x) \cdot dx$. La notación $\int$ representa una S *alargada*, la letra S proveniente de la palabra Superficie. Se verá más adelante que una de las aplicaciones más importantes de las integrales es el cálculo de áreas.

2. Tabla de Integrales

$$
\begin{array}{lcl}
\int x^n \cdot dx & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} \; + \; C \quad (n \neq -1) \\
\int a^x \cdot dx & = & \frac{a^x}{ln(a)} \; + \; C \\
\int \frac{1}{x} \cdot dx & = & ln|x| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x+a} \cdot dx & = & ln|x+a| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx & = & arcsin\frac{x}{a} \; + \; C \\
\int sin(x) \cdot dx & = & -cos(x) \; + \; C \\
\int cos(x) \cdot dx & = & sin(x) \; + \; C \\
\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx & = & tg(x) \; + \; C \\
\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx & = & -ctg(x) \; + \; C \\
\int tg(x) \cdot dx & = & -ln|cos(x)| \; + \; C \\
\int ctg(x) \cdot dx & = & ln|sin(x)| \; + \; C
\end{array}
$$

3. Métodos de Cálculo de Integrales

1) Método de sustitución: involucra **recetas de solución**
2) Método de integración por partes:

$$\int f \cdot g' \cdot dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \cdot dx$$

4. Integrales Definidas. Fórmula de Leibniz-Newton

- Sea F(x) la primitiva de la función f(x), es decir $\int f(x) \cdot dx = F(x)$
- Fórmula de Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

5. Integrales Definidas. Método de Integración por Partes

$$\int_a^b f \cdot g^{'} \cdot dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f^{'} \cdot g \cdot dx$$

6. Operaciones con Integrales

$\int (f+g) \cdot dx = \int f \cdot dx + \int g \cdot dx$

$\int (f-g) \cdot dx = \int f \cdot dx - \int g \cdot dx$

$\int k \cdot f \cdot dx = k \cdot \int f \cdot dx$, donde k= constante

Las fórmulas anteriores son válidas tanto para integrales indefinidas como para integrales definidas.

7. Sutilezas sobre las Integrales

- Sumas de Riemann, aplicaciones al cálculo de límites de sucesiones
- Sumas de Darboux
- Funciones integrables

8. Aplicaciones de Integrales Definidas

Sea f(x) una función, el sistema cartesiano XOY, una línea x=a y una línea x=b

- Sea S = área de la curva delimitada por f(x), x=a, x=b y Ox

$$S = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

- Sea V = volumen del cuerpo obtenido al rotar la curva delimitada por f(x), x=a, x=b alrededor del eje Ox.

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

- Sea l_c = longitud de la curva f(x), entre x=a y x=b

$$l_c = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

- Sea A = área lateral del cuerpo obtenido al rotar la curva delimitada por f(x), x=a, x=b alrededor del eje Ox.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f')^2} \cdot dx$$

- Sea $G(x_g, y_g)$ el centro de gravedad de la placa delimitada por f(x), x=a, x=b, Ox. Las coordenadas del centro de gravedad son:

$$x_g = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx} \qquad y_g = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

FICHA 32: Tabla de Derivadas y Tabla de Integrales

1. Tabla de Derivadas

Función	Derivada
k(=constante)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabla de Integrales

$$
\begin{aligned}
\int x^n \cdot dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\
\int a^x \cdot dx &= \frac{a^x}{ln(a)} + C \\
\int \frac{1}{x} \cdot dx &= ln|x| + C \\
\int \frac{1}{x+a} \cdot dx &= ln|x+a| + C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx &= \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| + C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx &= \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx &= ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx &= ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx &= arcsin\frac{x}{a} + C \\
\int sin(x) \cdot dx &= -cos(x) + C \\
\int cos(x) \cdot dx &= sin(x) + C \\
\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx &= tg(x) + C \\
\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx &= -ctg(x) + C \\
\int tg(x) \cdot dx &= -ln|cos(x)| + C \\
\int ctg(x) \cdot dx &= ln|sin(x)| + C
\end{aligned}
$$

FICHA 33: Tabla de Derivadas y Tabla de Integrales en Una Página

1. Tabla de Derivadas

Función	Derivada
k(=constante)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabla de Integrales

$$
\begin{array}{lcl}
\int x^n \cdot dx & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} \; + \; C \quad (n \neq -1) \\
\int a^x \cdot dx & = & \frac{a^x}{ln(a)} \; + \; C \\
\int \frac{1}{x} \cdot dx & = & ln|x| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x+a} \cdot dx & = & ln|x+a| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \; + \; C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx & = & arcsin\frac{x}{a} \; + \; C \\
\int sin(x) \cdot dx & = & -cos(x) \; + \; C \\
\int cos(x) \cdot dx & = & sin(x) \; + \; C \\
\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx & = & tg(x) \; + \; C \\
\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx & = & -ctg(x) \; + \; C \\
\int tg(x) \cdot dx & = & -ln|cos(x)| \; + \; C \\
\int ctg(x) \cdot dx & = & ln|sin(x)| \; + \; C
\end{array}
$$

Esta ficha fue diseñada para contener de la manera más compacta posible las fórmulas que se usan frecuentemente en análisis matemático.

Para lograr este objetivo, se consideran apropiadas las siguientes recapitulaciones:

Recapitulación 1: *Fórmulas Principales para Derivadas*

1) Operaciones con derivadas:

$(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$, donde k=constante

$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

2) Avanzado $(f^g)' = f^g \cdot (g' \cdot ln(f) + g \cdot \frac{f'}{f})$

3) Diferenciación de funciones compuestas: $f(u(v(x)))' = f'(u(v(x))) \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Recapitulación 2: *Fórmulas Principales para Integrales*

1) Método de sustitución: involucra **recetas de solución**

2) Método de integración por partes:

$$\int f \cdot g' \cdot dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \cdot dx$$

3) Operaciones con integrales:

$\int (f+g) \cdot dx = \int f \cdot dx + \int g \cdot dx$

$\int (f-g) \cdot dx = \int f \cdot dx - \int g \cdot dx$

$\int k \cdot f \cdot dx = k \cdot \int f \cdot dx$, donde k= constante

4) Fórmula de Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

5) Cálculo de área:

Sea S = área de la curva delimitada por f(x), x=a, x=b y Ox

$$S = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Grupo

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$

Por ejemplo A=R y $*$: R x R $->$ R, donde x$*$y=x+y-xy

(A,$*$) es un **grupo** si se satisfacen las condiciones de parte estable, asociatividad, elemento neutro, elemento simétrico. Si además también se satisface la conmutatividad, el grupo se llama grupo conmutativo o grupo abeliano.

1. Parte estable:

Para cualquier x $\in$ A e y $\in$ A $\rightarrow$ x$*$y $\in$ A

2. Asociatividad:

Para cualquier x,y,z $\in$ A, tenemos x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

3. Elemento neutro:

Para cualquier x $\in$ A, existe un elemento e $\in$ A tal que x$*$e=e$*$x=x

4. Elemento simétrico:

Para cualquier x $\in$ A, existe un elemento x' $\in$ A tal que x$*$x'=x'$*$x=e

5. Conmutatividad:

Para cualquier x,y $\in$ A, x$*$y=y$*$x

Ejemplos de grupos:

a) (R,+) Elemento neutro e=0. Simétrico por ejemplo para x=7, es x'=-7

b) (R\{0},.) Elemento neutro e=1. Simétrico por ejemplo para x=7, es x'=$\frac{1}{7}$

Monoide

Sea A un conjunto no vacío y una operación $*$

(A,$*$) es un **monoide** si se satisfacen las condiciones de asociatividad y elemento neutro, es decir:

1. Asociatividad:

Para cualquier x,y,z $\in$ A, tenemos x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

2. Elemento neutro:

Para cualquier x $\in$ A, existe un elemento e $\in$ A tal que x$*$e=e$*$x=x

Anillo

Sea A un conjunto no vacío y dos operaciones $*$ y $\circ$

(A,$*$,$\circ$) es un **anillo** si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. **(A,$*$) es un grupo abeliano**, es decir

   (A,$*$) = parte estable

   (A,$*$) = asociatividad

   (A,$*$) = elemento neutro

   (A,$*$) = elemento simétrico

   (A,$*$) = conmutatividad

2. **(A,$\circ$) es un monoide**, es decir

   (A,$\circ$) = asociatividad

   (A,$\circ$) = elemento neutro

3. La operación $\circ$ (la del monoide) **es distributiva respecto a** $*$ (la del grupo) **tanto por la izquierda como por la derecha**, es decir:

a) $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ (distributividad por la izquierda de $\circ$ respecto a $*$)

b) $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$ (distributividad por la derecha de $\circ$ respecto a $*$)

Ejemplo de anillo:

(R,+,$\cdot$) La suma juega el papel de $*$ y la multiplicación juega el papel de $\circ$. Se observa que se verifican las condiciones de distributividad de la multiplicación respecto a la suma:

a) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ (distributividad por la izquierda de la multiplicación respecto a la suma)

b) $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$ (distributividad por la derecha de la multiplicación respecto a la suma)

Notas

1. Un **anillo conmutativo** se llama un anillo en el que la operación $\circ$ es conmutativa.

2. Un **cuerpo** se llama un anillo en el que cualquier elemento diferente del elemento neutro de $*$ (el del grupo) es invertible. Si la operación $\circ$ (la del monoide) es conmutativa, entonces el cuerpo se llama **cuerpo conmutativo**

Isomorfismo

Sean (A,$*$), (B,$\circ$) y una función f:A$\rightarrow$ B

1. Se dice que tenemos un **morfismo** de (A,$*$) a (B,$\circ$) a través de la función f(x), si se satisface la siguiente relación:

$$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$$

2. Si además la función f(x) es biyectiva, se dice que tenemos un **isomorfismo**. Por lo tanto

isomorfismo=morfismo + f(x) biyectiva

Recordar que una función es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

EPÍLOGO

Has completado el recorrido desde la Ficha 1 hasta la Ficha 34. Si trabajaste este material en serio, ahora posees algo valioso: una base sólida y rigurosa en matemáticas que te servirá para toda la vida.

Este epílogo aborda tres temas importantes: lo que fue deliberadamente excluido de este libro, la filosofía detrás de su diseño compacto y una palabra final sobre el coraje.

Capítulos No Incluidos en Esta Obra

El propósito de este libro fue sintetizar las herramientas de trabajo esenciales de las matemáticas de la escuela secundaria y de los primeros años universitarios.

El objetivo principal era que esta obra fuera CORTA.
Por esta razón, solo se trataron los temas considerados estrictamente necesarios.

Los capítulos no fueron incluidos si cumplían una o más de las siguientes características:

- Algunos son demasiado fáciles y se asume que ya son conocidos
- Otros ya se cubrieron en la escuela secundaria
- Algunos se usan con menos frecuencia en la práctica
- Otros son demasiado difíciles para el alcance previsto
- Algunos no son requeridos por los programas estándar de exámenes
- Otros aparecen muy raramente o no aparecen en los exámenes reales
- Y así sucesivamente

El enfoque fue implacable: **incluir solo lo que es esencial**. Todo lo demás, sin importar cuán interesante, fue deliberadamente excluido para mantener este libro compacto y utilizable.

La Filosofía de la Edición Compacta

Este libro es la **versión destilada y compacta** de una obra mucho más extensa (aproximadamente tres veces esta longitud). La versión completa contiene ejemplos adicionales, ejercicios complementarios, discusiones extendidas y tratamientos teóricos más profundos.

Sin embargo, esa versión completa sería **abrumadora para la mayoría de los usuarios**. Después de 45 años de enseñanza, una lección está completamente clara: los estudiantes se benefician más de dominar los elementos esenciales que de estar expuestos a todo.

Esta edición compacta representa una elección deliberada: **profundidad sobre amplitud, dominio sobre cobertura**.

Si trabajas este libro sistemáticamente y dominas su contenido, experimentarás una **transformación completa** en tus habilidades matemáticas. Poseerás:

- Fundamentos sólidos en las matemáticas básicas
- La capacidad de pensar con rigor y sistemáticamente
- Confianza para abordar matemáticas avanzadas de forma independiente
- Un marco que hace que el aprendizaje posterior sea mucho más fácil

Este libro compacto contiene todo lo que necesitas para construir esa base. La versión completa existe para quienes desean más — pero no es necesaria. Esta versión es **suficiente y completa**.

Disponibilidad y Ediciones Futuras

Este libro está disponible actualmente en los siguientes idiomas:

- **Rumano** (el original)
- **Inglés**
- **Español** (esta edición)

Está prevista una traducción al **Francés**, para que los estudiantes trabajadores de esa comunidad lingüística también puedan acceder a este recurso.

Para actualizaciones sobre traducciones y recursos adicionales, visita: **rjurcone.net** o contacta: **jurcone@yahoo.com**

Una Última Palabra: Sobre el Coraje

La palabra "coraje" proviene del latín *cor*, que significa "corazón". Tener coraje significa actuar **desde el corazón**, incluso en presencia del miedo.

Si eres joven hoy, vives en una era de ansiedad sin precedentes. Las redes sociales amplían la comparación y la inseguridad. Los sistemas educativos a menudo priorizan las métricas de rendimiento sobre el aprendizaje genuino. La presión por tener éxito puede sentirse aplastante, y el miedo al fracaso paralizante.

Déjame decirte algo importante: **la habilidad matemática no se trata principalmente de talento innato**. Se trata de **coraje** — el coraje de sentarse con un problema difícil incluso cuando no ves la solución de inmediato. El coraje de perseverar cuando te sientes incapaz. El coraje de intentarlo de nuevo después de cometer errores.

Este libro fue escrito por alguien que aprendió matemáticas de forma **completamente autodidacta** — solo, de libros, sin tutores ni ayuda externa. Hubo innumerables momentos de confusión, frustración y dudas. Lo que marcó la diferencia no fue el brillo, sino el **coraje de continuar**.

Tienes ese mismo coraje dentro de ti. La ansiedad que sientes no es señal de insuficiencia — es señal de que te importa profundamente tener éxito. Ese cuidado, canalizado en esfuerzo persistente, es más poderoso que cualquier talento innato.

Esto es lo que necesitas saber:

- **La confusión es normal.** Todo matemático la experimenta constantemente. No es señal de fracaso; es señal de que estás aprendiendo.
- **Los errores son esenciales.** Aprendes más al trabajar a través de los errores que al hacerlo bien de inmediato.
- **El progreso lento sigue siendo progreso.** Algunos estudiantes captan los conceptos rápidamente; otros necesitan más tiempo. Ambos caminos llevan al dominio si perseveras.
- **No estás compitiendo con los demás.** Tu única competencia es con la versión de ti mismo de ayer. ¿Eres mejor hoy que ayer? Eso es el éxito.
- **El trabajo duro supera al talento cuando el talento no trabaja duro.** El esfuerzo constante, incluso en pequeñas cantidades, se acumula con el tiempo en resultados extraordinarios.

Este libro es el fruto de décadas de experiencia docente, diseñado específicamente para ayudarte a aprender de forma independiente. La calidad está ahí. La metodología está probada.

Lo que queda es tu parte: el coraje de tomar esta herramienta y usarla, día tras día, incluso cuando se sienta difícil.

Las matemáticas no son una barrera diseñada para mantenerte fuera. Son un lenguaje — y como cualquier lenguaje, puede ser aprendido por cualquiera dispuesto a practicar constantemente. No necesitas ser un genio. Necesitas ser **valiente** y **persistente**.

Te deseo perseverancia y éxito.

Con respeto y aliento,

El Autor